第 1 不完全性定理と外延性

倉橋 太志（Taishi Kurahashi）

神戸大学　システム情報学研究科

本発表では、Gödel や Rosser による第 1 不完全性定理を、各理論において独立な文をどのように実効的に与えることができるかという観点から捉え直し、そこに「外延性」という条件を課すことができるかを考察する。

第 1 不完全性定理は、ペアノ算術 PA が本質的不完全であること、すなわち PA を含む無矛盾な c.e. 理論が不完全であることを主張する。Rosser 文を用いる標準的な証明は、さらに、各無矛盾な c.e. 拡大理論に対して独立な文を実効的に構成できることを示している。この意味で PA は実効的本質的不完全である。理論 T が有限本質的不完全であるとは、任意の文 φ について、$T+\varphi$ が無矛盾ならば $T+\varphi$ が不完全であることをいう。有限本質的不完全性の実効版として、本発表では次の三種類を区別する。

(A) c.e. 集合のインデックスに基づく実効版。これは、有限拡大理論を生成する c.e. インデックスを入力として、そこで独立な文を出力する計算可能関数を考えるものである。
(B) 追加公理に基づく実効版。これは、文 φ を入力として、$T+\varphi$ において独立な文を出力する計算可能関数を考えるものである。
(C) 追加公理と論理式に基づく実効版。これは、ある論理式 $\rho(x)$ によって、各 φ に対して $\rho(\varphi)$が $T+\varphi$ 上で独立となるようにするものである。

これらの性質にさらに「外延性」という条件を追加できるだろうか？ここでいう外延性とは、同じ理論を与える入力に対しては、同値な独立文を与える、という性質である。例えば (B) の場合、$T\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$ ならば $T+\varphi$ と $T+\psi$ は同じ理論を表す。このとき、独立文を与える計算可能関数 f に対して $T\vdash f(\varphi)\leftrightarrow f(\psi)$が成り立つ場合に、f は外延的であるということにする。同様に、(C) の場合には $T\vdash\rho(\varphi)\leftrightarrow\rho(\psi)$を満たすとき、外延的であるということにする。

この問題は、独立な文を単に構成できるかどうかではなく、その構成が理論の表示に依存してしまうのか、それとも理論の外延にのみ依存しているとみなせるのかを問うものである。別の言い方をすれば、第 1 不完全性定理における独立文の実効的構成が、証明可能性の構造をどの程度反映しているのかを理解する問題である。

外延性に関して最初の重要な結果を与えたのは Shavrukov and Visser [3] である。彼らは、ある $\Delta_2(\mathrm{PA})$ 論理式 $\rho(x)$ が存在して、$PA+\varphi$ が無矛盾ならば $\rho(\varphi)$ が $PA+\varphi$ 上で独立であり、さらに $PA\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$ ならば $PA+\varphi\vdash\rho(\varphi)\leftrightarrow\rho(\psi)$となることを示した。これは純粋な外延性ではなく、結論が $PA+\varphi$ 上での証明可能性になっているため、「条件付き外延性」という弱い外延性である。この結果の系として、 (B) に対しては、外延性を満たす計算可能関数が存在することが従う。

本発表は、Kurahashi and Visser [2] による結果に基づくものである。まず、(A) のインデックスに基づく実効版では、条件付き外延性でさえ実現できないことが分かった。これは、(A) の定式化が本質的に内包的であり、理論の表示の違いを無視できないことを示している。

次に、Hamkins [1] によって提起された問題に関連して、(C) の論理式に基づく実効版における純粋な外延性を考える。まず、これは一般には不可能である。すなわち、$T+\varphi$ が無矛盾ならば $\rho(\varphi)$が $T+\varphi$ 上で独立であり、かつ $T\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$ ならば $T\vdash\rho(\varphi)\leftrightarrow\rho(\psi)$となるような論理式 $\rho(x)$ は存在しない。しかし、純粋な外延性が不可能であるとしても、外延性をわずかに弱めると肯定的な結果が得られる。すなわち、$T+\varphi$ が無矛盾であり、かつ $T\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$ ならば $T\vdash\rho(\varphi)\leftrightarrow\rho(\psi)$となる、という「無矛盾外延性」を考える。このとき、任意の PA の無矛盾 c.e. 拡大理論 T に対して、独立性と無矛盾外延性を同時に満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ が存在する。さらに、外延性を条件付き外延性まで弱めると、より強い独立性を満たす論理式を得ることができる。具体的には、$T+\varphi$ が無矛盾ならば $T+\varphi$ は $\rho(\varphi)$を証明せず、さらに $\rho(\varphi)$は $T+\varphi$ 上で Π_1-保存的となるような Π_1 論理式 $\rho(x)$ が存在する。

以上をまとめると、有限本質的不完全性の三種類の実効版は、外延性をどの程度実現できるかという点で本質的に異なる振る舞いを示す。(B) では Shavrukov and Visser の結果により外延的な計算可能関数が得られる。(C) では純粋な外延性は不可能であるが、無矛盾外延性を課すならば Π_1 論理式による肯定的結果が得られる。また、条件付き外延性まで弱めれば、強い独立性を持つ構成も可能である。他方、(A) では条件付き外延性すら不可能であり、インデックスに基づく定式化の内包性が明確に現れる。

このように、第 1 不完全性定理における独立文の実効的構成を外延性の観点から分析することで、独立文を作れることと、それを理論の外延に依存する形で作れることとの間に、明確な差異があることが分かる。本発表では、この差異を有限本質的不完全性、外延性、条件付き外延性、無矛盾外延性という概念を通じて整理し、上述した肯定的・否定的結果について紹介する。

[1] Joel David Hamkins. Nonlinearity and illfoundedness in the hierarchy of large cardinal consistency strength. *Monatshefte für Mathematik*, 208(4):687–728, 2025.

[2] Taishi Kurahashi and Albert Visser. Extensional independence. Preprint, arXiv:2506.13524, 2025.

[3] V. Yu. Shavrukov and Albert Visser. Uniform density in Lindenbaum algebras. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 55(4):569–582, 2014.