

三角形の合同条件，それ自体の証明

竹之下保雄 (Yasuo Takenoshita)

1. 三角形の合同条件の学習は，多くの国の中学校で行われている。これを一般化したものが三角形の相似条件，この具体例として直角三角形の相似条件がある。これから三角比が定義され，三角関数を導入することができる。なお三角関数は数学の中で重要な位置を占めている。従って，この合同条件が成立する根拠を研究することは重要である。この論文は，この根拠を明確にし，またあるべき数学教育を提言する。

2. ユークリッド原論について

三角形の合同条件は，紀元前3世紀にユークリッド (Ευκλείδης, エウクレイデース) が，原論 (Στοιχεία, ストイケイア，根本的な諸々の原理) の中で，諸々の定義 (Ὅροι), 諸々の要請 (Αιτήματα), 諸々の共通概念 (κοιναι εννοιαι) という前提を明確にして論証した。

3. ユークリッド原論以前の数学

プラトーン (Πλάτων) の著書メノン (Μενων) に，哲学者ソークラテース (Σωκράτης) とメノンとの対話がある。この中に，二つの数学の問題が提起されている。

(1) οὐκοῦν γένοιτ' ἂν τούτου τοῦ χωρίου ἕτερον διπλάσιον, τοιοῦτον δέ, ἴσας ἔχον πάσας τὰς γραμμάς ὡσπερ τοῦτο. 「もう一つの，この面積の二倍のものが生じるのではないだろうか。そしてその二倍のものは，この図形と同様に，全ての辺が等しいものとして。」

*ある正方形があり，その2倍の面積を持つ正方形を求める方法について問う問題

(2) , εἰ οἶόν τε ἐστὶν ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι,

「この円の中に，この図形が，三角形として内接せられる可能性があるかどうか。」

これらは，コンパスと定規のみでの作図 (幾何学的作図) が可能かという問いと同義。

答は(1)は可能。(2)は「この図形」が多角形で，この円に内接する正三角形の面積より小さければ可能。仮に面積が小さくても，円や楕円であれば，円周率が超越数なので三角形に変形できないから作図は不可能。この問いの可否は与えられた図形による。

なお(1)で，ソークラテースが用いた数学は厳密な論証数学ではない。例えば，正方形の各辺の中点を結んでできる四角形が正方形である証明は，議論されていない。

4. 原論. 定理4. SAS (三角形の合同条件，二組の辺とその間の角) に関して

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ τὴν γωνίαν τῆ γωνία ἴσην ἔχη τὴν ὑπο τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

「もし二つの三角形が，互いに，二つの辺に対して等しい二つの辺を持ち，また一つの角も，諸直線で囲まれた等しい角を持つならば，一つの底辺もまた互いに等しくなるであろう。また三角形も互いに等しくなるであろう。また等しい諸辺が対する角から，互いに残りの角も残りの角に等しくなるであろう。」

原論では、最初に SAS を、移動を前提とした「重ね合わせの原理 the principle of superposition」を使用して証明。それから SSS, ASA を証明した。しかし重ね合わせの原理は、後世の数学者達から数学的に説明ができないとの反論があった。

ラッセル (Bertrand Russell) の主張 : 「indeed Euclid's is so bad that he would have done better to assume this proposition as an axiom. 実際、ユークリッドの証明は非常に悪いので、彼はこの命題を公理として仮定した方が良かったであろう。」

The principles of Mathematics P405

その為、ヒルベルトやタルスキはこの原理を排除し、新たな幾何学を樹立した。

原論に関する他の課題としては、「二等辺三角形の底角が等しい。」の証明で、未証明の鏡像対称性の使用等がある。

5. ヒルベルト (David Hilbert) の幾何学基礎論 (Grundlagen der Geometrie)

この原理の使用を避ける為、SAS を前提とし ASA と SSS を証明した。この場合、前提にした SAS の成立する根拠に関して、説明の必要がある。

6. アルフレッド・タルスキ (Alfred Tarski) の幾何学

Betweenness(中間性)と \equiv (“equidistance” or “congruence of segments”)を前提に、 $AB \equiv CD$ 等を使い、SAS や ASA 等を証明した。

このとき使用した $AB \equiv CD$ の式は、物理的世界とは関係がなく単なる論理式。もし現実の世界と関連させるならば、重ね合わせの原理との関連の説明が必要である。

7. 中学校の数学教育で教えるべき課題

(1) 中学校で学習する図形的前提が不明確。次のことを前提にして論証すべき。

(ア) 直線の定義 : 直線上に点が無限にあり、それぞれの点の平角は 180° である。

* 原論や幾何学基礎論には、この定義が記述されていない。

(イ) 平行線の同位角は等しい。

(ウ) 同位角が等しければ二直線は平行。

* これらから、『対頂角は等しい』『平行線の錯角は等しい』等の論証が可能になる。

(2) 一般に行われている『二等辺三角形の底角が等しい』の証明の問題点

(ア) 『 $\triangle ABC$ を二等辺三角形とする。頂角 A の二等分線を引き、底辺 BC との交点を D とする。 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ は SAS より、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ よって $\angle B = \angle C$ 』

この証明では、最初に、 $\angle A$ の二等分線が引けることの証明が必要。ただし、角の二等分線は SSS を使って証明できるが、SSS は『二等辺三角形の底角は等しい。』を使って証明されるので、循環論法になってしまう。

(イ) 『 $\triangle ABC$ を二等辺三角形とする。底辺 BC の中点 D と A を線で結ぶ。 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ は、SSS より $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ よって $\angle B = \angle C$ 』

これも SSS は『二等辺三角形の底角は等しい。』を使って証明されるので、循環論法である。