数学としての様相論理を「哲学的に」語る

黒川英徳（Hidenori Kurokawa）

金沢大学　国際基幹教育院

企画主旨：様相概念の歴史は古く、アリストテレスまで遡る。しかし、様相論理が本格的に発展したのは 20 世紀に入ってからのことである。現代の様相論理は C. I. ルイスによって厳密含意という概念を経由して 1910 年代に導入された。その後しばらくの間、（代数的、位相的意味論などの展開はあったものの）様相論理はクワイン等、内包的概念を敵視する哲学者によって厳しく批判されるという状況が続いた。しかしながら 1960 年代頃のクリプキ・モデルの導入を主な契機として、様相論理は数理論理学の一分野として発展し、膨大な技術的蓄積を築き上げてきた。そうした技術的蓄積は様相論理の本来の哲学的な動機とは無縁な数学的成果に過ぎないと見なされることが多い。しかしながら実際には、その蓄積からこそ導かれる哲学的な知見や洞察が多数存在するように思われ、また様相論理の発展には、数学的な動機だけでなく、そのような哲学的な知見や洞察が極めて重要な役割を果たす可能性も十分に想定し得る。このワークショップでは、

i）様相μ計算などコンピュータ・サイエンスへの応用をもつ様相論理
ii)算術的意味論を持つ様相論理
iii）様相論理の一種であり、項計算の体系でもある「証明論理」

といった、特に数学として発展の著しい様相論理のいくつかの枠組みについて、それらにおける技術的な蓄積を振り返るとともに、

そもそも様相論理における意味論と構文論との関係はいかなるものであるのか

という問題について掘り下げ、それらの基礎となる哲学的な背景と帰結が何であったのか、またあるのか、そして、そこからいかなる様相論理の将来が描かれ得るのかについて語りたい。

コンピュータサイエンスにおける様相論理の数学的研究

鹿島 亮（Ryo Kashima）

東京科学大学 情報理工学院

コンピュータサイエンスの近年の国際会議で発表された様相論理に関する論文の中で私が特に面白いと思いその発展を研究しているものを紹介し、様相論理のどんな研究が（私と同じ好みの研究者から）興味を持たれているかを説明する。

【1】Piotr Ostropolski-Nalewaja and Tim S. Lyon: Decidability of Quasi-Dense Modal Logics. *Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS2024.*

Quasi-dense modal logic とは $m<n$ なる自然数毎に決まる「m ステップで行ける世界には n ステップでも行ける」という条件を持つクリプキモデルで特徴付けられる論理の総称であり、基本的な様相命題論理 K に公理 $\Diamond^m p \to \Diamond^n p$ を加えて得られる。これらの論理の決定可能性問題（与えられた論理式の恒真性（充足可能性）を判定するアルゴリズムがあるか否か）は長年未解決であったが、この論文ではそれを肯定的に解いている。

この論文はデータベース関連の用語・概念を用いていて個人的にはわかりにくいが、解読すると、有限モデルを地道に作っていくという方法で有限モデル性（充足可能な論理式には有限モデルが存在する）を示している。現在これを洗練化させることを研究中である。

【2】Bahareh Afshari and Graham E. Leigh: Cut-free Completeness for Modal Mu-Calculus. *Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2017.*

【3】Maurice Dekker, Johannes Kloibhofer, Johannes Marti, and Yde Venema: Proof Systems for the Modal μ-Calculus Obtained by Determinizing Automata. *International Conference on Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods, TABLEAUX 2023.*

Modal μ-calculus（様相ミュー計算）とは様相命題論理 K に不動点演算子を加えたものである。様相記号は基本的な□と◇しか持っていないが、不動点演算子を使うことで非常に多くの複雑な働きの様相記号を定義できるので、強力な様相論理体系として広く研究されている。様相ミュー計算は論理式もモデルもシンプルであるが、決定可能性、有限モデル性、証明体系の完全性などといった重要な基本性質を示すことが他の様相論理と比べて格段に難しく、チャレンジングである。

論文【2,3】は共に様相ミュー計算の新しい証明体系を導入しているが、それ以前に

知られていた証明体系としては以下がある。（体系 A）Kozen (1983) が最初に導入したシンプルなヒルベルト流証明体系。これの完全性（恒真な論理式は必ずその体系で証明できる）は Walukiewicz (2000) が示した。（体系Ｂ）Niwinski-Walukiewicz (1996) が導入した無限長パスを持つカット無しシークエント計算。（体系Ｃ）Jager-Kretz-Studer (2008) が導入した無限分岐を持つカット無しシークエント計算。（体系Ｄ）Jungteerapanich (2009) が導入した、複雑なラベル情報を用いて証明図は有限木であるカット無しシークエント計算。体系Ａに対する Walukiewicz (2000) の完全性証明は難解で私は理解していない。体系Ａはとてもシンプルなので完全性証明もシンプルなものが欲しい、という願いは、私を含めた多くの研究者が持っている。

論文【2】にもそのような動機が書かれており、そこでは新しいカット無しシークエント計算（これを体系Ｅと呼ぶが、正確には複数の体系である）を導入して、体系Ｄの証明図から体系Ｅの証明図への変換を示すことで完全性を示している。さらに体系Ｅから体系Ａへの変換は簡単なので、これでやりたかった体系Ａの完全性の別証明になっている。ただしこの証明も私にとっては難解で理解していないし、実は議論に誤りがあって体系Ｅは完全ではない、と論文【3】などで指摘されている。

論文【3】は体系Ｄとよく似た、複雑なラベル情報を用いたカット無しシークエント計算を与えている。これは複雑ではあるが、オメガオートマトンの決定化アルゴリズムを記述したものである、という方針はわかりやすい（オメガオートマトンの決定化とは無限語に対する非決定性有限オートマトンを受理言語を変えずに決定性に変換することであり、ここで受理する無限語は体系Ｂの無限パスに相当する）。個人的には、最近までこの論文【3】の存在を知らずに似たようなことを考えていたので、少々残念である。

以上で紹介した研究を私が面白いと思う理由を挙げる。（理由１）対象となっている様相論理は古典命題論理に基本的な様相記号を加えただけ、あるいはそれに不動点演算子を加えただけで、論理式もモデルもシンプルでわかりやすい。（理由２）証明体系の完全性、有限モデル性、決定可能性などといった基本的かつ自然かつ重要な性質を示している。（理由３）有限の入力から有限の出力を作るアルゴリズム（有限モデルを作る、証明図を作る、決定性オートマトンを作る、等）を与えることが議論の要になっている。

様相論理はシステム検証や知識表現などに使えるという理由からもコンピュータサイエンスにおいて研究されているが、個人的には上記の理由が面白くて研究をしている。特に理由３のようにアルゴリズムを考えることが研究の要になることも多く、そのような研究こそが私にとっての「コンピュータサイエンスにおける様相論理の数学的研究」である。

証明論理と証明可能性論理

串田裕彦（Hirohiko Kushida）

海上保安大学校　海上安全学講座

現代様相論理に対する有力な意味論の1つに証明可能性意味論がある。これは、ブラウアの直観主義論理における証明可能性概念の解明のため、その埋め込み先として様相論理S4をとり、実際その埋め込み可能性を示した1930年代のゲーデルの仕事に端を発する。一方、その直前に発表された彼のいわゆる不完全性定理により、形式体系のある自然な仮定とそこでの証明述語のある自然な定義の下、「矛盾が（当該の形式体系で）証明されない」ことを表現している論理式がその体系で証明できないことが示されていた。この論理式は、現在の様相論理の表記法で表すと、$\neg\Box\bot$となるが、これはS4体系では定理である。さらに、論理式$\Box\neg\Box\bot$を考えると、S4体系において定理であるばかりでなく、まさに不完全性定理と抵触することから、（現代の標準モデルにおいて）偽命題である。このように、様相論理S4の様相記号を形式算術の証明可能性に解釈すると不合理に導かれる。形式算術における証明可能性述語を正しくシュミレートする様相論理系の特定が解決されたのは、1976年のSolovayの仕事まで待つこととなった。その体系は現在GLと呼ばれることが多いが、それ以降、GLや周辺の様相論理系について、その意味論や証明論、あるいは形式算術への応用などが活発に研究されてきた。

　他方、ゲーデルによる直観主義論理のS4体系への埋め込み定理は、直観主義の証明可能性概念を古典論理の枠組みを通して理解しようとする試みと解することができる。この研究の流れは、途絶えたままといってよいような状況であった。これの一応の解決に至ったのは、さらに1990年代のアルテモフの仕事まで待つこととなった。これは、アルテモフ自身も関わっていた80年代のGL研究の興隆の小休止した時期といえるかもしれない。そのアイディアは、様相子の担い手として証明可能性の代わりに個々の証明の概念を採用することにある。すなわち、核となる様相文が、s：Aなる形をとり、これは「sはAの証明」を意味する。この形の様相文、および、証明を表す項同士の演算がいくつか導入された「証明論理 Logic of Proofs」 が考案され、算術的に完全であることが示された。

　証明論理の様相記号の外形的な振る舞いのみに着目すると、S4と一致する。すなわち、証明論理の証明図が与えられた時、s：Aの部分を全て一律に$\Box A$に変換すると、S4の証明図になるのである。また逆に、S4の証明図が与えられた時、適切な仕方で、様相記号$\Box$に項を割り当てることで、証明論理の証明図を構成することができる。そのアルゴリズムがいくつか具体的に与えられている。この証明論理とS4との対応、証明論理の算術的完全性、さらに、ゲーデルの直観主義論理のS4への埋め込みによって、よく古典論理の観点から直観主義論理の形式的証明意味論、従って、証明可能性意味

論を与えることができることとなった。これはいわゆるBHK意味論の形式的表現とも看做せる。

本発表では、証明論理と証明可能性論理の様相概念の関係如何の問題を議論する。証明可能性は証明の存在を含意しており、具体的な証明を表す項を伴った様相文を存在量化することによって、証明可能性の様相文が得られる。その意味において、前者の方がより基礎的であるといえるが、そうした関係からは、例えば、S4とGLの違いが説明できない。ここには、証明論理特有の証明項のもつ変項としての役割が効いている。この役割、意味を柔軟に広げることで、より一般的な証明可能性概念との関係が見通せるといった研究の可能性を展望したい。

証明可能性述語の様相論理に関する最近の進展

倉橋 太志（Taishi Kurahashi）

神戸大学　システム情報学研究科

本講演では、証明可能性述語の様相論理に関する最近の進展に焦点を当てる。証明可能性論理は、理論 T の証明可能性述語 $Pr_T(x)$の性質を、様相論理を用いて分析する研究分野である。最近、第 2 不完全性定理の成立に関わる導出可能性条件を、証明可能性論理の枠組みを用いて分析する研究が進んでいる。これまでに一定数の研究成果が蓄積されてきたため、本講演ではこれらの概観を与えることを目指す。

第 2 不完全性定理の証明のためには、証明可能性述語が導出可能性条件と呼ばれる条件を満たすことが求められる。代表的な条件として D1, D2, D3 があり、これらから第 2 不完全性定理とその拡張である Löb の定理が導かれる。これらの導出可能性条件は様相論理の公理と対応しており、D1、D2、D3、および Löb の定理はそれぞれ様相論理の必然化則、公理 K、4、および GL に対応する。この対応を通じて、導出可能性条件の性質を、様相論理を用いて分析することが可能となる。Solovay の算術的完全性定理(1976)は、T が Σ_1-健全であるとき、様相論理 GL が標準的な証明可能性述語 $Prov_T(x)$に関する原理とちょうど一致することを述べるものである。

D1, D2, D3 より弱い条件として、非正規様相論理の文脈で分析されている原理に対応する条件 E, M, C や $D3^m_n$ などが第 2 不完全性定理としても重要な役割を持つことが近年分かってきた。これらの導出可能性条件と無矛盾性の関係について体系的な結果が得られていて、整理が進んでいる。

導出可能性条件の様相論理としての研究成果を紹介する。これらは主に 5 つのグループに分類される：

(1) N の拡張

(2) NA_{m,n}

(3) EN の拡張

(4) MN の拡張

(5) K の拡張

論理 N はすべての証明可能性述語の証明可能性論理の共通部分である。論理 NA_{m,n} は $D3^m_n$に対応する。EN に関しては近傍意味論を用いた算術的完全性が得られている。MN は Kripke 意味論に似た意味論を用いて算術的完全性が示されている。K の拡張は D2 を満たす証明可能性述語の分析に対応する。

以上のような、導出可能性条件と無矛盾性原理を様相論理の枠組みで分析する研究は、特に第 2 不完全性定理について、「どの導出可能性条件がどのように本質的に働いているのか」という構造に関する問題を、様相論理の枠組みで精密に捉え直すことを目指している。

様相論理研究のなかで生じる幾つかの疑問

鈴木　信行（Nobu-Yuki Suzuki）

静岡大学　理学部

本発表では、様相論理（より広くは非古典論理）を研究する過程で生じた幾つかの素朴な疑問や違和感を手掛かりに、とりわけ構文論と意味論の関係を改めて考え直したい。こうした疑問や違和感は、例えば次の様な問いとして現れる。

- 様相作用子は何に対して作用し、何を生み出しているのか。構文論的には、□や◇を A に付加して□A や◇A を作る操作に過ぎないが、その操作の実体はどの様に理解されるべきなのか？

- いわゆるクリプキ意味論とは何をしているのか。そもそも様相なるものを捉えているのか。それとも、むしろ様相を作り出しているのか。

- 構文論と意味論の身分は、古典（命題）論理と様相論理で同じなのか。古典命題論理においては、両者は論理の姿を示すための従属的役割をそれぞれが個別に担っているように見える。しかし、様相論理においては、論理の姿を示すと言うより、両者は「合わせ鏡」のように相互依存的関係なのではないか。

こうした問いが私自身の研究のなかで生じ、また影響を与えている。それを振り返ることによって、数学としての様相論理研究とその哲学的側面との接点をどのように見出すことができるのかを考えたい。

本発表の目的は、完成された見解を提示することではなく、論理学研究の現場において生じた疑問を哲学者と共有し、その意味を考えるための契機とすることである。