

Justification Logic について

串田裕彦
Hirohiko Kushida
海上保安大学校

黒川英徳
Hidenori Kurokawa
金沢大学

ゲーデルは1933年の短い論文において、直観主義論理から S4 様相論理系への翻訳を提起したが、これには直観主義論理に証明可能性意味論provability semanticsを付与しようとする意図があった。しかしながら、ゲーデル自身が注意するように、彼の第二不完全性定理と抵触することから、その翻訳で使用された様相オペレータは形式的な証明可能性を表すと解することは不可能であった。そこで、直観主義論理に対する形式的な証明可能性解釈の付与が長年の未解決問題となってきた。この問題に解決を与えたのが、アルテモフによる「証明論理 Logic of Proofs」である。この論理体系では、様相オペレータとして、具体的な証明を表す項が使われた。すなわち、 $s:A$ なる形が様相文となり、これは「 s は A の証明である」を意味する。さらに項同士の演算子がいくつか与えられ、S4の様相オペレータに対し、「証明論理」の項を適切に割り当てることで、S4体系を「証明論理」に埋め込むことが可能となった。これと、ゲーデル翻訳を合成することにより、直観主義論理に対し、形式算術上の証明意味論を付与することができた。より具体的には、S4の定理を証明論理の定理に移す「実現化定理 Realization Theorem」、証明論理が実際、形式算術へ（忠実に）埋め込めることを主張する「算術的完全性定理」が、ランドマークとなったアルテモフの2001年論文の技術的な中心的成果である。（Sergei N. Artemov. Explicit provability and constructive semantics. Bulletin of Symbolic Logic, 7(1):1–36, March 2001）

2001年論文以降、証明論理自身の研究が活発に進められつつ、認識論理としても解釈、研究され（そこでの様相文 $s:A$ は「 s は A の理由、根拠」を意味する）、多数の関連論文が出版された。現在では、より広く「正当化論理 Justification Logic」と呼ばれ、さまざまな興味深い論理的性質を備えた実り豊かな論理学分野と位置付けられている。既に教科書が二冊出版され、幾篇かのサーベイ論文が目見え、Stanford Encyclopedia of Philosophy にも項目が掲載されている。

本発表では、大まかに三段階で議論を進めていく。まず、2001年論文の基本的成果の説明を行い、次に、その後の発展のうち興味深いトピックを三つほど取り上げる。

1 ある種の直観主義論理の定理を、ゲーデル翻訳を介して「証明論理」の定理へと翻訳する際、（項同士に関して）自己言及性が不可欠であるという結果。この結果は、直観主義論理における証明概念には自己言及性が本質的に内在していることを示唆する。

2 認識論理（知識の論理）研究として、論理的全知の問題や共有知識の正当化論理による解釈や意味付けの問題。

3 証明論理の発展研究としてアルテモフが近年発表し世を騒がせた、構成的偽Constructive falsityの概念とそれによるヒルベルトの無矛盾性証明計画の実現の問題。

最後に、我々自身の関心から、正当化論理、特に証明論理の基礎部分に関わる概念的問題を三点ほど指摘し、議論を深める。

1 自由変数（変項）の取り扱いに関して、正当化論理の枠組みが示唆する論点である。これは専門家の間ではある意味常識に属していることとされ、掘り下げて議論されることが少ない。とはいえこれは重要な論点であり、まだ不明瞭なことが多く残っている論点であることを確認する。

2 S4の様相オペレータを介して正当化論理（特に証明論理）と算術の形式体系を結びつけることに伴う概念的問題点である。特に、S4様相オペレータが「算術的に健全でない」という事実をどのように評価するか、またS4様相オペレータが「非形式的証明可能性」を表現すると言われる際の根拠とは何か、という点などを議論する。

3 正当化論理と同様に「証明項」をもつCurry-Howard isomorphismと正当化論理の比較に関する論点である。特に、前者で行われる証明簡約による正規化証明が正当化論理にとっていかなる意味をもつのかを考察する。