(－1)×(－1)＝－1 となる計算理論は可能か？

竹之下保雄（Yasuo Takenoshita）

１．この論文は，以前，「負数×負数＝負数の計算理論」で発表した論文を別な視点で考察したもの。現在，全世界の中学生達は，(−1)×(−1)=＋1 は無条件で成立すると学ぶ。しかし実際はそうではない。この式には，本来異なる絶対値と正の数が同一であるという前提で証明されており，それを変えれば (−1)×(−1)=−1 も得られる。なお数には絶対値がなく，正負の数の 2 種類しか存在しない場合は，(＋1)+(−1)=0 が成立する根拠は不明になる。もし彼らがこれを理解するならば，数学には前提があり，前提を変えれば新しい理論が作れることがわかる。＊正負の符号は＋−,加減の演算記号は+ −とする。

２．数学とは何か

形式主義（formalism)の立場で述べるならば，数学とは前提を問わない無矛盾の理論。ヒルベルトは，「„Man muß jederzeit an Stelle von“ „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.」「人は，いつでも『諸々の点，諸々の直線，諸々の平面』の箇所の所には，『諸々の机，諸々の椅子，諸々のビールジョッキ』と言い表すことができなければならない。」(David Hilbert Gesammelte Abhandlungen,Band,Ⅲ,P403)と述べた。もし，(−1)×(−1)=−1 が成立する理論があるとするならば，これも数学である。

３．スタンダールの疑問，(Vie de Henry Brulard, P 333)「supposons que les quantitès negatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10000 francs de dette par 500 francs (de dette), cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5000000, cinq millions (de francs)? 諸々の負の量は，ある人の諸々の借金としよう。どのように，借金の 1 万フランに借金の 5 百フランをかけたとき，この人は 5000000, 5 百万フランの財産をもつのだろうか，或いは持つようになるのか。」( )は筆者が記入

４．ライプニッツの疑問，(G.W.Leibniz Mathematische Schriften 5, P387～P388)

「Si enim −1 est minus nihilo, utique 1 ad −1 erit ratio majoris ad minus; sed vero contra ratio −1 ad 1 est ratio minoris ad majus; quomodo ergo utrobique eadem ratio erit? …modo id sano sensu intelligatur. もし本当に−1 は無より小さいならば，必然的に−1 に対する 1 の比は，より小さいものに対するより大きいものの比であろう。しかし他方，これに対して，1 に対する−1 の比は，より大きいものに対するより小さいものの比である。何故，それでは，両者とも同じ比であるのはどうしてか。…単に− 1 は合理的な感覚によってのみ理解されるのである。」この文は，1：−1=−1：1 に関する言及。なお sano sensu(合理的な感覚)とは何を意味するのかは，議論の対象になる。

５．(−1)×(−1)=＋1 についての様々な証明の問題点

(1) 水槽から毎分 1 L で水を出す場合，水の増加を＋，時間の経過を＋とすると，

ア：４分後は，水は４Ｌ減少するので，(－１)×(＋４)=－４Ｌ
イ：上記の場合，４分前は今から４Ｌ増加しているので，(－１)×(－４)=＋４Ｌ
しかし時間の経過を＋にしなければならない理由はない。時間の経過を－とすると，
ア：４分後は，水は４Ｌ減少するので，(－１)×(－４)=－４Ｌ
イ：上記の場合，４分前は今から４Ｌ増加しているので，(－１)×(＋４)=＋４Ｌ
従って何を前提にするのかで符号が決まるので，具体的な現象からの説明は不可能。
(＋)×(＋)=(＋)を前提にすると，(－)×(＋)=(－)，(＋)×(－)=(－)，(－)×(－)=(＋)
(＋)×(＋)=(－)を前提にすると，(－)×(＋)=(＋)，(＋)×(－)=(＋)，(－)×(－)=(－)

(2) 数式による説明（広中平祐の数学教室，P17～P19，サンケイ出版)
$0\times(-1)=0$…①，$1+(-1)=0$…②，②を①に代入。$\{1+(-1)\}\times(-1)=0$　よって，
$\{1+(-1)\}\times(-1)=1\times(-1)+(-1)\times(-1)=0$…③，$1\times(-1)=-1$…④，④を③に代入。
$-1+(-1)\times(-1)=0$，従って $(-1)\times(-1)=1$ {原文に記載はないが，④は単なる前提}
(問題点) $1=+1$とすると，④の式は $(+1)\times(-1)=-1$…⑤となる。この証明は，
⑤を前提にしたものであり，その結果 $(-1)\times(-1)=+1$ になる。もし前提を変えて，
$(+1)\times(-1)=+1$とすると，③より$+1+(-1)\times(-1)=0$，$(-1)\times(-1)=-1$と別な結果になる。

６．様々な定義による計算体系（ａの次の数：a^{+}，ａの前の数：a^{-}とする。）
定義Ｉ（従来の加法・減法の定義）
① $(+a)+0=(+a)-0=+a$
② $(+a)+(+b)^{+}=\{(+a)+(+b)\}^{+}$，$(+a)-(+b)^{+}=\{(+a)-(+b)\}^{-}$
③ $(+a)+(+b)^{-}=\{(+a)+(+b)\}^{-}$，$(+a)-(+b)^{-}=\{(+a)-(+b)\}^{+}$
例 $(+1)+(+1)=(+1)+0^{+}=\{(+1)+0\}^{+}=(+1)^{+}=+2$，$0-(+1)=0-0^{+}=(0-0)^{-}=0^{-}=-1$
定義Ⅱ（定義１を変形した新しい定義）
① $(+a)+0=(+a)-0=+a$，
② $(+a)+(+b)^{+}=\{(+a)+(+b)\}^{-}$，$(+a)-(+b)^{+}=\{(+a)-(+b)\}^{+}$
③ $(+a)+(+b)^{-}=\{(+a)+(+b)\}^{+}$，$(+a)-(+b)^{-}=\{(+a)-(+b)\}^{-}$
例 $(+1)+(+1)=(+1)+0^{+}=\{(+1)+0\}^{-}=(+1)^{-}=0$
　$(+1)-(+1)=(+1)-0^{+}=\{(+1)-0\}^{+}=(+1)^{+}=+2$
定義Ⅲ（従来の乗法の定義，なお加法・減法は定義Ｉを使う。）
① $(+a)\times0=0$ ② $(+a)\times(+b)^{+}=(+a)\times(+b)+(+a)$
③ $(+a)\times(+b)^{-}=(+a)\times(+b)-(+a)$
例 $(+1)\times(+1)=(+1)\times0^{+}=(+1)\times0+(+1)=0+(+1)=+1$
定義Ⅳ（定義Ⅲを変形した新しい定義，ただし加法・減法は定義Ｉを使う。）
① $(+a)\times0=0$ ② $(+a)\times(+b)^{+}=(+a)\times(+b)-(+a)$
③ $(+a)\times(+b)^{-}=(+a)\times(+b)+(+a)$
例$(+1)\times(+1)=(+1)\times0^{+}=(+1)\times0-(+1)=-1$，$(-1)\times(-1)=(-1)\times0^{-}=(-1)\times0+(-1)=-1$
なお，定義Ⅱと定義Ⅲ，定義Ⅱと定義Ⅳの組合せでも，他の計算理論が作れる。