Toward Noncommutative Causal Theories:
Category Algebras and States on Categories

西郷甲矢人 (Hayato Saigo)

Department of Bioscience, Nagahama Institute of Bio-Science and Technology

本講演では、非可換な(noncommutative)因果理論を構築する基盤としての「圏代数」及び「圏上の状態」の概念を紹介する。講演者は近年(Saigo　2021)、これらの概念を「相対論」と「量子論」の統合を目指して形成された「量子場」概念の理解に用いることを提案した。相対論の本質は事象の間の（直接的及び間接的な）因果的関係の総体として時空を捉えることにあり、この「因果的関係の総体」はある種の「圏」（適切な「合成」の構造を持つ「矢印」のシステム）として捉えることが可能である。そして量子論は、非可換な「代数」（物理量代数）と「期待値汎関数」（物理量代数の各要素に対しその「期待値」を対応させる写像）との組を用いた「非可換確率論」の一例と考えられる。したがって、圏の合成構造を反映した代数である「圏代数」（これは一般に非可換となる）や、その上の期待値汎関数としての「圏上の状態」を量子場を捉える基盤として用いることは自然である。

しかし、因果構造と（非可換）確率構造（非可換確率論は従来の確率論の一般化である）の融合という問題は、量子場を考えるときだけに浮上するわけではない。それどころか、因果性について定量的に考える際にはいずれ必ず突き当るはずの問題である。なぜなら、Wysockiの講演においても改めて明確となるように、因果は一般的には非決定論的性格のものであり、もしそれを定量的に理解しようとするのであれば、（少なくとも何らかの一般化された意味で）最終的には確率概念と関係付ける必要があるだろうからだ（なお、定量化が不適切であるような文脈での因果性もまた重要であり、Wysockiの講演はむしろそこに焦点が置かれるであろう）。一方、大塚の講演においても扱われる通り因果構造を圏構造として捉えることは可能であり、近年豊富な研究成果も得られてきている。したがって因果構造と（非可換）確率構造の融合の基盤として圏代数や圏上の状態を考えることもまた自然であると言えるだろう。

ここで次の非常に正当な疑問が投げかけられるかもしれない：なぜ「非可換」でなければならないのか？

講演者の暫定的な答えはこうである：まず第一に、因果構造は従来の確率論の言葉で書き切れないことに注意しよう。量子論的な文脈はもちろんであるが、マクロな状況のみを考えてもそのことは理解できる。例えば、因果理論において不可欠な「介入」は、従来の確率論でいう「条件付き確率」を考えることと同じくらい根本的だが、しかし全く異なったものである。それどころか介入の一般概念は、従来の確率論の基礎概念に還元できるようなものではないのである。ある条件のもとでは介入の効果を条件付き確率に還元することが可能となるが、（大塚の講演でも強調されるように）その条件は全く自明なものではないし、それなしに因果構造を考えられないという性格のものでもない。したがって、因果構造と確率構造を一般的・統一的に扱うには少なくとも従来の確率論より広い枠組みで考える必要があるはずだが、そのような枠組みの候補として（すでに量子論の成功という「実績」を持ちその「可換部分」として従来の確率論を包含する）非可換確率論を考えることは極めて自然である。さらに言えば、因果構造が圏として捉えられる限り非可換確率構造は圏代数や圏上の状態という形で現れてくるのだから、それを考えることは不可避的でさえある。

もちろんこの答えはあくまで仮設的なものであり、多くの異論が出るに違いない。実り多い議論が生まれる触媒として本講演が機能することを目指したい。

本講演は英語にて行う。

In this talk, the concepts of "category algebras" and "states on categories" will be introduced as a basis for constructing noncommutative causal theories. The speaker has recently proposed to use these concepts to understand the concept of "quantum field," which was conceived to unify relativity and quantum theory (Saigo 2022). The essence of relativity is to view space-time as a system of (direct and indirect) causal relations between events, and this system can be viewed as a category (a system of "arrows" with an appropriate compositionality structure). On the other hand, quantum theory can be considered an example of "noncommutative probability theory" based on pairs of noncommutative "algebras" of observables and "expectation functionals" (mappings that map observables into their expectation values). Therefore, as a basis for capturing quantum fields, it is natural to use category algebras, which are (generally noncommutative) algebras reflecting the compositionality structure of categories, and states on categories, which are expectation functionals over category algebras.

However, the problem of merging causal structures and (noncommutative) probabilistic structures (note that noncommutative probability is a generalization of conventional measure theoretic probability theory) does not only emerge when considering quantum fields. On the contrary, it is a problem that must eventually be confronted when thinking quantitatively about causality. This is because, as Wysocki's talk will remind us, causality is generally non-deterministic in nature, and if it is to be understood quantitatively, it will eventually need to be related (at least in some generalized sense) to the concept of probability. (Note that it is also important to investigate causality when numerical quantification is not appropriate, and Wysocki's talk will rather focus on that). On the other hand, as mentioned in Otsuka's talk, it is possible to consider the causal structures as a category structure, and lots of research results have been obtained in recent years. Therefore, it is also natural to consider category algebras and states on categories as basic notions for the fusion of causal structures and (noncommutative) probabilistic structures.

Here, a very legitimate question may be asked: Why does it have to be "noncommutative"?

The speaker's tentative answer is as follows: First of all, let us note that causal structures cannot be written in the language of conventional probability theory. This can be understood by considering only the macroscopic situation, not to mention the quantum context. For example, "intervention," which is essential in causal theories, is as fundamental as considering "conditional probability" in conventional probability theory, but quite different. On the contrary, the general concept of intervention is not something that can be reduced to the basic concepts of conventional probability theory. Under certain conditions, it is possible to reduce the effects of intervention to conditional probabilities, but (as emphasized in Otsuka's talk) the conditions are not at all self-evident, nor are they of such a nature that we cannot think of causal structures without them. Thus, in order to treat causal and probabilistic structures in a unified manner, it is at least necessary to consider a framework broader than that of conventional probability theory, and it is quite natural to consider noncommutative probability theory (which has succeeded in quantum theory and includes conventional probability theory as its "commutative part") as a candidate for such a framework. Moreover, as long as causal structures can be considered as categories, it is even inevitable to think of a noncommutative probability structure in terms of category algebras and states on categories.

This answer is of course provisional and many objections will be raised. We hope that this talk will act as a catalyst for fruitful discussions.

This talk will be conducted in English.

Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras, *Symmetry*. 2021; 13(9):1727.