量子論から一般相対論を導出する

清水　哲男（Tetsuo Shimizu）

量子論と一般相対論とは，物理学のみならず全自然学の基礎であるが，その統一は「無限論」に由来する「発散の困難」に直面し，20 世紀初頭における登場以来今日に至るまで完成していない．わが「ディラック対の概念(concept of Dirac pair)」は，①「量子論の公理: $\left[\partial_x, d_x\right]=1,$ 」それのみから構成論的に出発し，② 基本ディラック対の「長さ」状態: P_x, と，「速さ」状態: ${}^{\lambda}D_x$, と，が，「ハミルトニアン: ${}^{\lambda}H_x$, 」によって「往復運動」を行っており，③それらの「量子論的・重ね合わせ」から成る「正/反」量子が，④一般相対論の「要請(postulate)」である「光速度不変の原理」および「等価原理(慣性質量=重力質量)」を充たす「慣性運動」を行っていることを，「トートロジー(恒等式)」のみを用いて証明することができた．「量子論の公理」のみから「一般相対論的運動論」が導出できたのである．証明過程の要所を以下に概論する．

「長さ」状態の基本ディラック対: P_x, を，「微分演算子: ∂_x, 」 および「積分演算子: d_x, 」の一対として定義する．この２行一列の行列形式で書かれる演算子には，「対称クロス積: $\otimes_S$ 」，「反対称クロス積: $\otimes_A$ 」，「単純乗積(巾乗積)」，および，「自己内部微分: $D\left(P_x\right),$ 」 が定義できる．基本ディラック対は，これらの演算について「演算子代数システム(algebraic system of operator(s),「作用素環(ring of operator)」)」を生成し，かつ，「演算: $\odot_A$ 」について，以下の「恒等式列(tautology)」が成立している．

$$P_x \triangleq \begin{pmatrix} \partial_x \\ d_x \end{pmatrix}, \left(\left[\partial_x, d_x\right]=1,\right), S_x \triangleq P_x \otimes P_x, A_x \triangleq P_x \otimes_A P_x = 1/2,$$

$$S_x \odot_A P_x \triangleq \left(\begin{bmatrix} \partial_x, S_x \\ S_x, d_x \end{bmatrix}\right)\left(=\begin{pmatrix} \left[\partial_x{}^2/2, d_x\right] \\ \left[\partial_x, d_x{}^2/2\right] \end{pmatrix} \triangleq D\left(P_x\right) P_x{}^2/2\right) = \left\{A_x, P_x\right\} = P_x.$$

基本ディラック対のアフィン変換で，「量子論の公理」を不変に保つものを「ゲージ変換(gauge transformation)」と呼ぶが，その表現は，「 $SL\left(2,\mathbb{C}\right)$:行列式=1，の 2 行 2 列の複素行列」=「ローレンツ群の開被覆群」である．　ここから，2 種の基本ディラック対として，「長さ」状態: P_x, と，「速さ」状態: ${}^{\lambda}D_x$, の存在が導出できる．また，

P_x，と${}^{\lambda}D_x$，との対称クロス積として「ハミルトニアン(Hamiltonian)：${}^{\lambda}H_x$，」が定義でき，それは「周波数: $\omega=1,$ 」の，「重力場内のガリレイの振子」=「『等価原理(慣性質量=重力質量)』を充たす運動体」の存在に対応している．

$$
{}^{\lambda}D_x \triangleq \begin{pmatrix} \lambda d_x \\ -\partial_x/\lambda \end{pmatrix}, \left(\left[\lambda d_x, -\partial_x/\lambda\right]=1,\right), -S_x = {}^{\lambda}D_x \otimes_S {}^{\lambda}D_x, -S_x \odot_A {}^{\lambda}D_x = {}^{\lambda}D_x,
$$

$$
{}^{\lambda}D_x \otimes_S P_x \triangleq {}^{\lambda}H_x = -\left(\partial_x{}^2/2\right)/\lambda + \lambda\left(d_x{}^2/2\right), \left(\leftrightarrow (\imath h)\left(\left(p_x{}^2/2\right)/m\right) + mq_x{}^2/2.\right)
$$

「ハルトニアン: ${}^{\lambda}H_x$，」は，「長さ」状態: P_x，と，「速さ」状態: ${}^{\lambda}D_x$，との間に，「往復運動」を引き起こしていることが，以下のように証明できる．

$$
{}^{\lambda}H_x \odot_A P_x \triangleq \begin{pmatrix} \left[\partial_x, -\left(\partial_x{}^2/2\right)/\lambda + \lambda\left(d_x{}^2/2\right)\right] \\ \left[-\left(\partial_x{}^2/2\right)/\lambda + \lambda\left(d_x{}^2/2\right), d_x\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda d_x \\ -\partial_x/\lambda \end{pmatrix} = {}^{\lambda}D_x,
$$

$$
{}^{\lambda}H_x \odot_A D_x \triangleq \begin{pmatrix} \left[\lambda d_x, -\left(\partial_x{}^2/2\right)/\lambda + \lambda\left(d_x{}^2/2\right)\right] \\ \left[-\left(\partial_x{}^2/2\right)/\lambda + \lambda\left(d_x{}^2/2\right), -\partial_x/\lambda\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ d_x \end{pmatrix} = P_x,
$$

$$
\Leftrightarrow P_x \xleftrightarrow{{}^{\lambda}H_x} {}^{\lambda}D_x.
$$

「一般的基本ディラック対: $P_x(\theta),$」 は,「長さ」状態: P_x，と,「速さ」状態: ${}^{\lambda}D_x$，との「量子論的・重ね合わせ」であり， $P_x(\theta) \triangleq P_x\cos\theta + {}^{\lambda}D_x\sin\theta, \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,\right)$ と書くことができ，また， $P_x(\theta)$，と， P_x，との対称クロス積は,

$$
G_x(\theta) \triangleq P_x(\theta) \otimes_S P_x = S_x\cos\theta + {}^{\lambda}H_x\sin\theta,
$$
$$
G_x(\theta) \odot_A P_x = P_x(\theta), G_x(\theta) \odot_A P_x(\theta) = P_x,
$$
$$
\Leftrightarrow P_x \xleftrightarrow{G_x(\theta)} P_x(\theta),
$$

であり,「ゲージ変換演算子: $G_x(\theta)$，」は， P_x，と， $P_x(\theta)$，との間に，往復運動を作り出している．これに， $\theta=\imath\tau$，と置けば「ローレンツ変換」が得られる．2 組の「速さ」状態: ${}^{\lambda}D_x$，の対称クロス積は, $-S_x$，であるから, それは「長さ」状態: P_x，を「『反』長さ」状態: $-P_x$，に変換し，「長さ:0」状態の空白領域: $P_x - P_x = 0,$ を出現させ，「速さ」状態: ${}^{\lambda}D_x$, を，「前へ」と「慣性運動」させる．最終的には,「速さ」状態: ${}^{\lambda}D_x$ は,「mass shell equation」を充たす「一般相対論的・慣性運動体」すなわち「光量子(photon)」を伴う「電(量)子」を生成していることが証明できた．