相対論的量子動力学の数学的基礎

Mathematical Foundation
of
Relativistic Quantum Dynamics

清水 哲男

「結論」からいうと

- 数学的意義:解析学(複素数体論+微分積分学)の「完全性(completeness)」，および，それに基づく公理論的相対論的量子動力学的モデルの存在による「無矛盾性(consistency)」が証明できた.
- 物理的意義:第一量子化条件「のみ」を公理とする量子動力学系が成立する. 「量子場(field)」においては，「一般」相対論的「慣性運動」を行う「量子(particle)」=「ガリレイの振子」，が出現する. 「発散の困難」の全くない相対論的量子場の理論(量子電磁気学)が成立する.

基本ディラック対の定義と構造

- 定義:

$$P_x \triangleq \begin{pmatrix} \partial_x \\ d_x \end{pmatrix}, S_x \triangleq \left\{\partial_x, d_x\right\}/2, A_x \triangleq \left[\partial_x, d_x\right]/2 = 1/2,$$

$$S_x \odot_A P_x \triangleq \begin{pmatrix} \left[\partial_x, S_x\right] \\ \left[S_x, d_x\right] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \left[\partial_x{}^2/2, d_x\right] \\ \left[\partial_x, d_x{}^2/2\right] \end{pmatrix} \equiv A_x \odot_S P_x \triangleq \begin{pmatrix} \left\{A_x, \partial_x\right\} \\ \left\{A_x, d_x\right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ d_x \end{pmatrix} = P_x,$$

- 構造:ゲージ変換演算子と4象限の存在

$${}^{\lambda}D_x \triangleq \begin{pmatrix} \lambda d_x \\ -\partial_x/\lambda \end{pmatrix}, {}^{\lambda}H_x \triangleq \lambda d_x{}^2/2 - \left(\partial_x{}^2/2\right)/\lambda,$$

$$P_x \xleftrightarrow{S_x} P_x, P_x \xleftrightarrow{{}^{\lambda}H_x} D_x, {}^{\lambda}D_x \xleftrightarrow{-S_x} {}^{\lambda}D_x,$$

$$G_x(\theta) \triangleq S_x \cos\theta + {}^{\lambda}H_x \sin\theta,$$

$$P_x(\theta) \triangleq P_x \cos\theta + {}^{\lambda}D_x \sin\theta,$$

$$G_x(\theta+\phi) \odot_A P_x(\theta) = P_x(\phi),$$

運動方程式「解」と量子動力学系

- 運動方程式の定義と「解」の存在:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta}{\Delta\tau} P_x \triangleq {}^{\lambda}H_x \odot_A P_x = {}^{\lambda}D_x, \\ \dfrac{\Delta}{\Delta\tau} {}^{\lambda}D_x \triangleq {}^{\lambda}H_x \odot_A {}^{\lambda}D_x = P_x, \end{cases}$$

- 量子動力学系方程式とその「解」との対応:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta}{\Delta\tau}\begin{pmatrix} p_x \\ q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[p_x, {}^{m}\mathrm{H}_x \right] \\ \left[{}^{m}\mathrm{H}_x, q_x \right] \end{pmatrix} / (\imath\hbar) = \begin{pmatrix} -m \cdot q_x \\ p_x / m \end{pmatrix}, \\ \dfrac{\Delta}{\Delta\tau}\begin{pmatrix} p_x \\ q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[p_x, -{}^{m}\mathrm{H}_x \right] \\ \left[-{}^{m}\mathrm{H}_x, q_x \right] \end{pmatrix} / (\imath\hbar) = \begin{pmatrix} +m \cdot q_x \\ -p_x / m \end{pmatrix}, \end{cases}$$

基本ディラック対の「接続(connection)」

- 基本ディラック対は，複素数体を演算子体に拡張したものであり，0点と∞点を除去したリーマン面と同相であり，ゲージ変換(接続)演算子による「接続(平行移動)」が定義できる.

$$[\partial_x, d_x] = 1 \Rightarrow \begin{cases} z\zeta = 1, \\ \dfrac{dz}{z} = -\dfrac{d\zeta}{\zeta}, \\ \dfrac{1}{2\pi\iota}\oint \dfrac{dz}{z} = -\dfrac{1}{2\pi\iota}\oint \dfrac{d\zeta}{\zeta} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow S^2 - \{0\} - \{\infty\},$$

$-S_x : P_x(\theta)$ [redacted]

「空間-時間-物質(Space-Time-Matter)」の「起源(Origin)」

- 基本ディラック対は，「接続(connection)」によって，「空間(Space)」を生成する．
- 基本ディラック対は，自らたちが接続されて成立する空間の上を，「一般相対論的慣性運動(general relativistic inertial motion)」を行う「ガリレイの振子」としての「物質(Matter)」を生成する．
- 基本ディラック対は，それらが普遍的に行っている「往復運動(universal alternative motion)」によって，「時間(Time)」を生成する．

相対論的量子場と電磁量子

- 量子場(長さをもつ磁量子と光速を単位とする運動量をもち反転運動する電場との重なり):

$$P_{(x;t)} \triangleq \sigma_s P_x + \sigma_t {}^{\iota c}P_t \triangleq \begin{pmatrix} \sigma_t \partial_x + \sigma_t \partial_t / (\iota c) \\ \sigma_x d_x + \sigma_t (\iota c) d_t \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_x d_x + \sigma_t (p_t / c) / \hbar,$$

- 量子(電子のコンプトン波長を単位とする長さをもつ電(磁)子の，磁場を伴う慣性運動):

$${}^{\lambda}D_{(x;t)} \triangleq \sigma_s {}^{\lambda}D_x + \sigma_t {}^{(\iota c)\lambda}D_x = \begin{pmatrix} \sigma_s \lambda d_x + \sigma_t (\iota c \lambda) d_t \\ -\sigma_s \partial_x / \lambda - \sigma_t \partial_t / (\iota c \lambda) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\sigma_s \partial_x / \lambda + \sigma_t (\iota c \lambda) d_t = \sigma_s p_x / m + \sigma_t (mc / \hbar) d_t = \sigma_s p_x / m + \sigma_t d_t / \bar{\lambda}_e,$$

「結論」と「これから」

- 数学的側面:基本ディラック対の概念は，竹内外史の「層空間(sheaf space)」の概念を，「演算子『体』(field of operators)」に拡張したものであり，「複素数『体』」から「0」点と「∞」点を除去したリーマン面と同相であり，コンパクト化でき，これを3次元に拡張することによって，ユークリッド計量をもちながらも，3次元球面と(大域的には)同相な多様体が構成できる.
- 物理的側面:(3,1)次元ディラック対の概念は，一般相対論的量子電磁気学を完成させる，と同時に，一般相対論的時空概念の見直しをもせまる．空間を構成する基本ディラック対は，「普遍質量単位:m」をもっており，それは，ダーク質量の存在を説明する．核子(クォーク)の存在については，9(=3×3)次元ディラック解析多様体として理解でき(基本解は計算済み)，それはニュートリノ相当をも含んでいる．重力は，これらの諸力を大域化したものとして理解できる．重力を含む大統一理論が構築できる.