デデキントの論文「連続と諸々の無理数」に関する考察

竹之下保雄(Yasuo Takenoshita)

１．デデキントは、Stetigkeit und Irrationale Zahlen (連続と諸々の無理数) の§4 Schöpfung der irrationalen Zahlen (諸々の無理数の創作) で無理数の存在を証明した。

D は有理数の二乗で整数、t、u、λ は正の整数とすると $t^2 - Du^2 = 0$ が成り立つ。ただし u は最小の整数。$\lambda u < t < (\lambda+1)u$ より $u' = t - \lambda u$ とすると u' は正の整数で u より小さい。$t' = Du - \lambda t$ とすると t' も整数。$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0$ から u より小さい u' は、$t'^2 - Du'^2 = 0$ が成り立つので矛盾。よって無理数が存在する。

２． １の解説、$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$ より整数 D は存在しないことの証明

$\left(\dfrac{t}{u}\right)^2 = D$ となる整数の組 (t 、u) を仮定。ただし、u は最小の整数とする。

$\lambda^2 < \left(\dfrac{t}{u}\right)^2 < (\lambda + 1)^2$ 、$\lambda u < t < (\lambda+1)u$ 、$u' = t - \lambda u$ より $0 < u' < u$ …①

t' を $\dfrac{t'}{u'} = \dfrac{t}{u} = \dfrac{t'}{t - \lambda u}$ とすると $t' = \dfrac{t(t - \lambda u)}{u}$ 、$0 < t - \lambda u < u$ より $0 < t' < t$ …②

$t' = \dfrac{t(t - \lambda u)}{u} = \dfrac{t^2 u}{u^2} - \lambda t = Du - \lambda t$ 、これより D、u、λ、t は整数なので t' も整数

① ②より $u > u'$、$t > t'$ となる整数 u' 、t' があり、$\left(\dfrac{t}{u}\right)^2 = \left(\dfrac{t'}{u'}\right)^2 = D$ となる有理数があるので、u は最小の整数ではない。仮定に反するので有理数は存在しない。

３．有理数を使ってのデデキントの証明。切断を $(A_1 、A_2)$ 、x を正の有理数とする。

$y = \dfrac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D}$ より y は有理数、$y - x = \dfrac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}$ 、$y^2 - D = \dfrac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}$

(1) $x^2 < D$ のとき、$\dfrac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D} > 0$ 、$\dfrac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2} < 0$ より $0 < x < y$ 、$x^2 < y^2 < D$

(2) $x^2 > D$ のとき、$\dfrac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D} < 0$ 、$\dfrac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2} > 0$ より $0 < y < x$ 、$D < y^2 < x^2$

(1) (2) より A_1 から x をとると最大数 x も、A_2 から x をとると最小数 x も存在しない。よって、切断 $(A_1 、A_2)$ は有理数からは作れないので無理数を表す。

４．デデキントが $y = \dfrac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D}$ の式を作った方法の推測

$0 < x < y$ 、$x^2 < y^2 < D$ この２つの式から求める。n を正の数とすると、

$y - x > 0$ 、$x^2 - D < 0$ より、$y - x = -n(x^2 - D) > 0$ よって $y = -n(x^2 - D) + x$ …①

① と $y^2 < D$ より、$y^2 - D = \left\{-n(x^2 - D) + x\right\}^2 - D < 0$ 、$0 < n < \dfrac{1}{\sqrt{D} + x}$ …②

$(x-\sqrt{D})^2 \geqq 0$ より $x^2-2\sqrt{D}x+D \geqq 0$ 、$\sqrt{D} < \dfrac{x^2+D}{2x}$ 、$\dfrac{2x}{3x^2+D} < \dfrac{1}{\sqrt{D}+x}$ …③

② ③ より $n=\dfrac{2x}{3x^2+D}$ …④ 、④を①に代入 $y=\dfrac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$ ($y<x$ でも成立)

5． 3 の式の一般化 、$y=\dfrac{x(x^2+nD)}{nx^2+D}$ とし有理数 n の値の範囲を求める。

$y-x=\dfrac{x(x^2+nD)}{nx^2+D}-x=\dfrac{(n-1)(D-x^2)x}{nx^2+D}$ 、$0<x<y$ 、$x^2<D$ より

$\dfrac{(n-1)(D-x^2)x}{nx^2+D}>0$ 、ここから $n>1$ …①

$y^2-D=\left(\dfrac{x(x^2+nD)}{nx^2+D}\right)^2-D=\dfrac{\{x^2-D\}\{x^4+D(-n^2+2n+1)x^2+D^2\}}{(nx^2+D)^2}$ 、$x^2-D<0$ より

$\dfrac{\{x^2-D\}\{x^4+D(-n^2+2n+1)x^2+D^2\}}{(nx^2+D)^2}<0$ 、よって $x^4+D(-n^2+2n+1)x^2+D^2>0$

この式から $-1 \leqq n \leqq 3$ …② 、 ① ②より n は $1<n \leqq 3$ を満たす有理数

6． 他の式 、$0<x<y$ 、$x^2<y^2<D$ より $y=-n(x^2-D)+x$ 、$0<n<\dfrac{1}{\sqrt{D}+x}$

(1) $n=\dfrac{1}{x+D}$ より $y=\dfrac{D+Dx}{x+D}$ (Numbers H.-D.Ebbinghaus P37 $s=\dfrac{2r+2}{r+2}$ が記載)

(2) $a \geqq 1$、$n=\dfrac{1}{x+aD}$ より $y=\dfrac{D+aDx}{x+aD}$ (全て $0<y<x$ 、$y^2<x^2<D$ でも成立)

(3) $a \geqq 1$ 、$0<b<1$ 、$n=\dfrac{b}{x+aD}$ より $y=\dfrac{x^2-bx^2+bD+aDx}{x+aD}$

(4) $a>1$ 、$n=\dfrac{1}{ax+D}$ より $y=\dfrac{(a-1)x^2+D(1+x)}{ax+D}$

7． λ は正の整数、$\lambda<D<(\lambda+1)$ となる整数 D は存在しないことの証明

$\dfrac{t}{u}=D$ となる正の整数の組 (t 、u) を仮定。ただし u は最小の整数とする。

$\lambda<D<(\lambda+1)$ より $\lambda<\dfrac{t}{u}<(\lambda+1)$ 、よって $0<t-\lambda u<u$

$u'=t-\lambda u$（u'は整数）とおくと、$0<u'<u$ …①

$\dfrac{t'}{u'}=\dfrac{t}{u}=\dfrac{t'}{t-\lambda u}$ とすると $t'=\dfrac{t(t-\lambda u)}{u}$ より $0<\dfrac{t(t-\lambda u)}{u}<t$ 、$0<t'<t$ …②

$t'=\dfrac{t(t-\lambda u)}{u}=\dfrac{t\times t}{u}-\lambda t=Dt-\lambda t$ より D、u、λ、 t は整数なので t' も整数

① ②より $u>u'$ 、$t>t'$ となる u' 、t' が存在し、$\dfrac{t}{u}=\dfrac{t'}{u'}=D$ となる。よって、

u は最小の整数ではない。仮定に反するので整数 D は存在しない。