# 多数帰結型の直観主義論理シークエント計算とその拡張

山﨑紗紀子 (Sakiko Yamasaki)
東京都立大学

本発表では，まず多数帰結型の直観主義命題論理のシークエント計算の体系について説明する．続いて，命題定項 C を加えた言語 Extended Intuitionistic Logic (**EILC**) を導入し，そのシークエント計算の体系を与える．**EILC** のシークエント計算の体系は，多数帰結型の直観主義論理のシークエント計算の体系に命題定項 C の規則を加えることで手にできる．最後に，**EILC** と古典論理との間にどのような関係が成り立つのかを見る．また，可能であれば，様相論理への拡張も行えることを検討したい（直観主義論理に命題定項 C を導入し，古典論理を埋め込むアイデアと，それに伴う様相論理的・モデル論的考察は岡本賢吾氏による．それ以外，特に多数帰結型シークエント計算を用いた証明論的諸結果については，（いまだ予想に留まっている部分も含めて）発表者の研究による）．

古典論理のシークエント計算 **LK** と直観主義論理のシークエント計算 **LJ** は 1933 年に G. ゲンツェンによって与えられた．シークエントの基本概念は，大まかには，幾つかの式が仮定された時にどのような式が導き出されるかということを表していると考えて良い．このとき，古典論理の場合には，帰結は複数でも良いが，直観主義論理の場合には，帰結はたかだか一つに限られる．では，直観主義論理のシークエント計算の体系として，帰結が複数のものを考えることができないかといえば，そのようなことはなく，帰結が複数の直観主義論理の体系を与えることも可能であるということが現在では知られている．本発表では，このような直観主義論理の多数帰結型のシークエント計算の体系を用いて議論を行う．

直観主義論理の論理式は以下：

$$p \,|\, \bot \,|\, \phi \wedge \phi \,|\, \phi \vee \phi \,|\, \phi {\to} \phi$$

多数帰結型の直観主義論理のシークエント計算の体系は，古典論理の推論規則のうち，含意の右の規則を以下の規則に置き換えることで手にできる：

$$\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \phi {\to} \psi}\ (R{\to}).$$

では次に，拡張直観主義論理（**EILC**）についてみる．**EILC** の論理式は直観主義論理の論理式に命題定項 C を加えることで手にできる．このとき，**EILC** のシークエント計算の体系は，多数帰結型の直観主義論理のシークエント計算の体系に C の規則を加えれば良い．C の規則は次のようになる：

$$\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma, \mathsf{C} \Rightarrow \phi{\to}\psi, \Delta}\ (L\mathsf{C}) \quad \frac{\Rightarrow ((p{\to}q){\to}p){\to}p}{\Rightarrow \mathsf{C}}\ (R\mathsf{C})$$

この **EILC** と古典論理との間には，以下のような関係（古典論理で証明可能な命題は，**EILC** では，シークエントの仮定に C が加わる形で証明可能となる）が成り立つことが予想される．

**Conjecture 1.**

$$\vdash_{\mathbf{CL}} \Rightarrow \phi \quad \text{iff.} \quad \vdash_{\mathbf{EILC}}\ \mathsf{C} \Rightarrow \phi$$

また，**EILC** のモデルは，極大点完備（有向完備）な直観主義クリプキモデル $(M, \leqq)$ と考えて良く，C の意味論は次のようになる：

$$w \models \mathsf{C}\ \text{ iff. }\ \forall u (w \leqq u \to w = u)$$

**EILC** と古典論理の間にこのような関係が成り立つ一方で，さらに，古典論理は以下のような翻訳

$(p)^{\mathsf{C}} := \mathsf{C}{\to}p$, $(\bot)^{\mathsf{C}} := \mathsf{C}{\to}\bot$, $(\phi{\wedge}\psi)^{\mathsf{C}} := \phi^{\mathsf{C}}{\wedge}\psi^{\mathsf{C}}$, $(\phi{\vee}\psi)^{\mathsf{C}} := \mathsf{C}{\to}(\phi^{\mathsf{C}}{\vee}\psi^{\mathsf{C}})$, $(\phi{\to}\psi)^{\mathsf{C}} := \phi^{\mathsf{C}}{\to}\psi^{\mathsf{C}}$

のもとで，**EILC** に埋め込み可能であることも予想される：

**Conjecture 2.**

$$\vdash_{\mathbf{CL}}\ \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \text{iff.} \quad \vdash_{\mathbf{EILC}}\ \Gamma^{\mathsf{C}} \Rightarrow \Delta^{\mathsf{C}}$$

本発表では，証明の細部については説明しないが，成り立つ幾つかの例を見る．

続いて，拡張様相論理（**EILM**）を与える．**EILM** では，C の代わりに，様相演算子 $[c^{\to}]$ と $[c^{\wedge}]$ が言語につけ加わり，以下のようになる：

$$p \,|\, \bot \,|\, \top \,|\, \phi \wedge \phi \,|\, \phi \vee \phi \,|\, \phi{\to}\phi \,|\, [c^{\to}]\phi \,|\, [c^{\wedge}]\phi$$

このように拡張された様相論理にも，古典論理は埋め込み可能になることが予想される．詳しい拡張の方法については，発表の際に説明する．

古典論理が，このような直観主義論理を拡張した言語に埋め込み可能となることで，直観主義論理をベースとする言語が，基礎づけ言語としての働きを十分に果たすことができるようになると考えられる．