

双側面古典論理の証明論的妥当性について

山形頼之 (Yoriyuki Yamagata)
国立研究開発法人 産業技術総合研究所

証明論的意味論は言明の意味を真理概念ではなく、その言明がどのように検証されるか（証明されるか）によって与えようとする意味論である。その動機の一つは Dummett による「表出論法」に基づく反実在論のプログラムである ([Dummett,1963]など)。無限の領域に言及する言明の真偽は、一般には決定することができない。したがって、真理概念に依存する意味論では、ある話者が無限領域に言及する言明を有意味に用いているかどうか、決定することができない。また、Brandom による「推論主義」もその動機を与える ([Brandom,1994])。

とはいえ、形式的体系における証明概念は通常、体系全体に依存しており「分子論」的ではない[Dummett,1975b]。そこで論理結合子をもつ文をそうでない文から導出する「導入則」と、その論理結合子を持つ文から持たない文を導出する「除去則」のペアを与え、ある証明規則がどの論理結合子に関連しているかを明確化することにより分子論性を実現する。しかし、任意の導入則と除去則のペアにより論理結合子を定義することはできない。そのようにすると、矛盾を導く論理結合子が容易に導かれるからである[Prior,1960-1961]。そこで「局所的」な制約である harmony を課す場合や「大域的」な制約である validity [Prawitz, 1971] を課す場合がある [Shroeder-Heister,2016]。

しかし古典論理にこのような制約を満たす体系を与えることは困難である。背理法（「Pでない」から矛盾が導出できればPが導ける）は古典論理の中心となる論法である。しかし、背理法はより複雑な前提（Pでない）から単純なPを導いており、Pの意味がより複雑な命題に依存するという意味で分子論性の条件を満たしていない。したがって、Dummettは古典論理に証明論的意味論を与える「Dummettの挑戦」を提示し、これが解決されない場合、古典論理を用いた科学全体の改訂を要求した。

このDummettの挑戦の解決として提示されたのがRumfittの双側面説である。Rumfittの双側面説では、証明の中において言明Aは主張+Aの形としても否認-Aの形としても現れうる。Rumfittは通常の論理規則を否認に対する論理規則を含むよう拡張し、また背理法と矛盾律（あわせてcoordination ruleと呼ばれる）を加えることにより古典論理を定式化した。そのうえで、Rumfittは論理規則についてharmonyが成り立つことを示した。しかし、Ferreiraや鈴木が指摘するようにRumfittはcoordination ruleの証明論的な説明は与えていない[Ferreira,2018][Suzuki,2015]。

本講演は双側面説に基づく論理に上述のvalidityを課した上で、coordination ruleも含めた古典論理の説明が可能であることを示す。Validityによる方法では、まず論理式の構造にもとづいて再帰的に“canonical proof”の集合を与える。そして、なんらかの証明簡約ルールにもとづいてcanonical proofに書き換えられる証明をvalid（妥当）な証明とし、すべての構文的に正しい証明が妥当であることをしめすことによりその論理体系が説明できたとする。しかしながら[Suzuki,2015]が指摘するうに、双側面説

にもとづく古典論理の体系では、 $+A$ の導出が $-A$ の導出に依存し、 $-A$ の導出が $+A$ の導出に依存する。よって通常の妥当性の定義は循環的な定義となってしまう、再帰的な canonical proofの定義を行うことができない。

本講演ではKnaster-Tarskiの不動点定理を用いて上述の循環を解消する。このように定義された妥当性概念を用いることにより、Rumfittの体系全体が妥当であること（健全性）、また妥当な証明が存在する言明はすべてRumfittの体系で導かれること（完全性）を示すことができる。

とはいえ、Knaster-Tarskiの不動点定理は強力な数学上の原理であり、その証明に集合の非可術的な定義を必要とする。構成主義の数学では非可術性が受け入れられない場合があり、構成主義に立場にたつDummettの挑戦に本講演の手法が答えられているか疑問がある。また、このような強力な手法を用いることが、表出論法に抵触しないか検討する必要がある。

本講演ではこの疑問について検討し、次のような回答を与える。まず、Dummettの挑戦は正当化の問題ではなく説明の問題である[Dummett,1973]。問題は古典数学の立場に立って古典論理を証明論的に説明することである。我々の妥当性証明は排中律を自明な形で用いてはおらず、排中律の「解明」を与えるものである。また表出論法については、本講演で与える canonical proofの集合は非決定的である。しかし、表出論法に抵触したとしても、「表象主義」を脱した意味論の一つとして本講演の内容は興味があるものである。

なお、本研究は鈴木佑京（株式会社ピコラボ）との共同研究である。

参考文献

- [Brandom, 1994] Brandom, R., Making it explicit: reasoning, representing, and discursive commitment, Harvard University Press
- [Dummett, 1963] Dummett, M., Realism, Truth and other enigma, Harvard University Press
- [Dummett, 1973] Dummett, M., The justification of deduction, *ibid.*
- [Dummett, 1976] Dummett, M., What is a theory of meaning? (ii), Truth and Meaning: Essays in Semantics, Clarendon Press
- [Ferreira, 2008] Ferreira, F., The co-ordination principles: A problem for bilateralism, *Mind*
- [Prawitz, 1971] Prawitz, D., Ideas and results in proof theory, *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics*
- [Prior,1960] Prior, A. The runabout inference-ticket, *Analysis*
- [Rumfitt, 2000] “Yes” and “No”, *Mind*
- [Schroeder-Heister, 2016] Schroeder-Heister, P., Open problems in proof-theoretic semantics, *Advances in Proof-Theoretic Semantics*, Springer International Publishing
- [Ukyo, 2015] Suzuki, U., Falsificationism and bilateralism, *Inferentialism Workshop*