ゲーデルによる算術の無矛盾性証明と構成主義

藤原 誠（Makoto Fujiwara）

日本学術振興会特別研究員 PD／明治大学

ゲーデルは[G33]において否定翻訳と呼ばれる古典算術の証明図を直観主義算術の証明図に逐次的に書き換える操作を導入し，それを介して古典一階算術 PA の無矛盾性を直観主義一階算術 HA の無矛盾性に帰着させた．さらに彼は[G58]において Dialectica 解釈と呼ばれる意味論を導入し，それを介して HA の無矛盾性を「ゲーデルの T」と呼ばれる有限型原始再帰的算術 T^{ω} の無矛盾性に帰着させた．これらの証明は全て有限的であり，T^{ω} は量化子を持たない有限的とみなせる体系であることから，ゲーデルのこの仕事は，有限の立場(のある種の拡張)における PA の無矛盾性証明として知られている．一方，クライゼルは[K62]において，HA を有限型に拡張した体系 HA^{ω} を導入し，さらに Dialectica 解釈の変種であり現代では modified realizability 解釈と呼ばれる HA^{ω} の意味論を導入して，クリーネの直観主義解析学体系の無矛盾性を証明した．論理結合子の解釈に基づいた構成主義的証明概念の非形式的説明は BHK(ブラウアー/ハイティング/コルモゴロフ)解釈いう呼称で知られているが，modified realizability 解釈は BHK 解釈をおおよそ自然に形式化したものである．

現代的には，Dialectica 解釈や modified realizability 解釈は，直観主義有限型算術 HA^{ω} の証明図を(証明の)証拠を取り出しつつ別の証明図に逐次的に書き換える証明論的変換操作と見ることができる[K08]．特に，Dialectica 解釈は，直観主義算術における証明を有限の立場(のある種の拡張)の証明に変換する操作である．

本講演では，HA^{ω} と T^{ω} の中間に位置する存在量化子と選言記号を言語に含まない直観主義有限型算術 HA^{ω}_{ef} を導入する．HA^{ω}_{ef} はその言語に存在量化子を含まないが，HA^{ω} や T^{ω} と同じく全ての有限型原始再帰的汎関数を項として持つ体系であり，構成主義的証明概念をおおよそ模倣する体系である．[K08]における modified realizability 解釈の健全性証明を詳しく分析すれば，modified realizability 解釈は HA^{ω} の証明図を対応する HA^{ω}_{ef} の証明図に変換し，特に，HA^{ω} の無矛盾性を HA^{ω}_{ef} の無矛盾性に還元することが分かる．一方で，古典有限型算術 PA^{ω} の証明図にゲーデル[G33]の否定翻訳を施すと，HA^{ω}_{ef} の証明図が得られる[1]．また，HA^{ω}_{ef} の証明図に modified realizability 解釈や否定翻訳を再度施しても証明図はもはや変わらない．つまり，HA^{ω}_{ef} は modified realizability 解釈と否定翻訳の両者に共通の基盤体系となっている．

HA^{ω}_{ef} が構成主義を模倣する体系であると認めれば，上記の数学的結果は，modified realizability 解釈は直観主義算術における証明を構成主義的な証明に変換する操作であることを主張している．一方，Dialectica 解釈と modified realizability 解釈は同一の数学的枠組みの中で定式化され，前者は後者のある種の拡張と見ることができる

---

[1] 特に，存在量化子と選言記号を含まない論理式に対しては，PA^{ω} は HA^{ω}_{ef} の保存拡大となっている．

[O06, O14]．構成主義は有限の立場としばしば混同されるが，これらの結果は，有限の立場は構成主義をより厳しく捉える立場であることを示唆する．また，[G33]におけるゲーデルの否定翻訳は，実際には PA の証明図を(HA に留まらず)$\mathrm{HA}^{\omega}_{\mathrm{ef}}$の証明図に変換するものであることを鑑みれば，ゲーデルは[G33]においてまず PA の無矛盾性を構成主義の無矛盾性に還元し，[G58]においてさらに有限の立場(のある種の拡張)の無矛盾性にまで還元したと理解することができる．

参考文献

[G33] K. Gödel, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Vol.4, pp.34–38, 1933.

[G58] K Gödel, Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica 12, pp.280–287, 1958.

[K08] U. Kohlenbach, Applied proof theory: proof interpretations and their use in mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[K62] G. Kreisel, On weak completeness of intuitionistic predicate logic, Journal of Symbolic Logic 27, pp.139–158, 1962.

[O06] P. Oliva, Unifying functional interpretations, Notre Dame J. Formal Logic, 47(2), pp.263–290, 2006.

[O14] P. Oliva, Unifying functional interpretations: Past and future, In Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the Fourteenth International Congress (Nancy), pp.97–122, 2014.