ゲーデルの第二不完全性定理について

倉橋 太志（Taishi Kurahashi）

木更津工業高等専門学校

Gödel [2] が 1931 年に発表した第一・第二不完全性定理はそれぞれ現代的な形で簡潔に述べれば「ペアノ算術（PA）を含む Σ_1-健全な再帰的可算理論 T は不完全である」，「PA を含む無矛盾な再帰的可算理論 T は自分自身の無矛盾性を証明できない」という定理である．Gödel による証明において中心的な役割を果たすのが，理論 T の証明可能性を表現する論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$（T の証明可能性述語）である．Gödel は φ と $\neg\mathrm{Pr}_T(\varphi)$が T 上で同値となる文 φ（T の Gödel 文）を構成し，φ が条件を満たす T から証明も反証もできないことを示すことで第一不完全性定理を証明した．更に第一不完全性定理の証明を PA において実行することによって，T の無矛盾性を表す文 $\mathrm{Con}^G_T = \exists x(\mathrm{Fml}(x) \wedge \neg\mathrm{Pr}_T(x))$が T において証明できないこと，つまり第二不完全性定理を証明した．ここで $\mathrm{Fml}(x)$は x が論理式のゲーデル数であることを述べる論理式である．しかし第一不完全性定理の証明を PA において実行する際には証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$に関する様々な性質が PA において証明できる必要があり，Gödel は実際には第二不完全性定理の証明のアウトラインを述べただけであった．

第二不完全性定理の詳細な証明を初めて与えたのは Hilbert and Bernays [3] である．Hilbert and Bernays は証明可能性述語が満たすべき条件 HB1, HB2, HB3 を提案し，Σ_1 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$がこれらの条件を満たせば無矛盾性を表す文 $\mathrm{Con}^H_T = \forall x(\mathrm{Fml}(x) \wedge \mathrm{Pr}_T(x) \rightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\neg x))$が無矛盾な T において証明できないこと，そして Gödel の証明可能性述語がこれらの条件を満たすことを証明した．Löb [7] は Hilbert and Bernays の条件をより扱いやすい形に書き換えた条件 D1, D2, D3 を用いて Löb の定理と呼ばれる結果を証明した．これにより，証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$が D1, D2, D3 を満たせば無矛盾性を表す文 $\mathrm{Con}^L_T = \neg\mathrm{Pr}_T(0=1)$が無矛盾な T からは証明できないことが従う．この Löb の条件を経由した第二不完全性定理が現在最もよく知られている第二不完全性定理の主張である．

第二不完全性定理のためのその他の十分条件は Jeroslow [4], Montagna [8], Buchholz [1] らによって得られている．これらの証明可能性述語に関するさまざまな十分条件はいずれも無矛盾性を表す文の証明不可能性を導くものであるが，それらは同一の結論を導くわけではなく，それぞれ Con^H_T, Con^L_T, Con^G_Tという異なる文の証明不可能性を導くものである．これらはいずれも T の無矛盾性を主張する文であるが，T 上で同値であるとは限らず，さらにこれらを定める証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$の選び方によっても強さは変わる．このように第二不完全性定理について考える際には，形式化の多義性の問題に向き合わなければならない（前原 [9]）．

本講演では証明可能性述語の導出可能性条件(derivability conditions)と第二不完全性定理を取り巻く状況について紹介する（[5,6] を参照）．特に Hilbert and Bernays

の条件と Löb の条件は互いに独立であり，したがってこれらの条件から導かれる第二不完全性定理も互いに独立であること，更にはこれらの第二不完全性定理が Gödel のオリジナルの第二不完全性定理の主張を達成しているとは言い難いことを紹介する．これらの結果から，第二不完全性定理とは，無矛盾性が証明できないことを主張する定理群の総称を指す現象のことであるとも見ることができる．

参考文献

[1] W. Buchholz, Mathematische Logik II, http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~buchholz/articles/LogikII.ps (1993).
[2] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. (in German), *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38 (1931), no. 1, pp. 173--198, English translation in Kurt Gödel, *Collected Works*, Vol. 1 (pp. 145--195).
[3] D. Hilbert and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Vol. 2, Springer, Berlin, 1939.
[4] R. G. Jeroslow, Redundancies in the Hilbert-Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 38 (1973), no. 3, pp. 359--367.
[5] T. Kurahashi, A note on derivability conditions, arXiv:1902.00895
[6] T. Kurahashi, Rosser provability and the second incompleteness theorem, *Symposium on advances in mathematical logic 2018 proceedings*, to appear. arXiv:1902.06863
[7] M. H. Löb, Solution of a problem of Leon Henkin, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 20 (1955), no. 2, pp. 115--118.
[8] F. Montagna, On the formulas of Peano arithmetic which are provably closed under modus ponens, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, vol. 6 (1979), no. B5, pp. 196--211.
[9] 前原昭二, 第 2 不完全性定理の内容的解釈, 科学基礎論研究, vol. 20 (1991), no. 3, pp. 143—147.