数理形態学のための双直観主義様相論理

佐野勝彦
北海道大学大学院 文学研究科

本発表では、無向グラフ上での数理形態学の基本演算を捉える枠組みとして双直観主義様相論理を導入し、ヒルベルト式公理化・完全性・決定可能性等の得られた結果について紹介する。

数理形態学(Mathematical Morphology)とは集合を使って「形・形状」を記述する数学的理論であり、画像処理にも応用される。何も構造が入っていない集合上に、ある種の「物差し」とみなせる構造化要素(structuring element)を導入し、その構造化要素を使って、集合上に与えられた形状を膨張(dilation)させたり、縮小(erosion)させる操作が基本的な演算とされる。ここで鍵となるのは構造化要素が集合上の二項関係 R を定めるという点である。Block (2002) は、集合上の膨張・縮小といった二つの演算が、それぞれ古典論理上の過去向きの可能演算子(R に関して過去のある時点で A が成立)と未来向きの必然演算子（R に関して未来のすべての時点で A が成立）で解釈されうることを明らかにし、これにより様相論理を通しての数理形態学の研究が可能となった。

一方、単なる集合ではなくノードとエッジからなる無向グラフ上でどのように数理形態学が展開可能かが Cousty ら (2013)によって研究された。しかし、無向グラフ上で二項関係をどのように定めるかにはいくつかの選択肢がある。本発表が従うのは、Stell (2015) が採用した、ノードとエッジを明示的に区別しないハイパーグラフによるアプローチである。ハイパーグラフは無向グラフの一般化であり、さらに、条件付きの擬順序とみなせ、その上では自然に二項関係を定めることができる。ハイパーグラフ上での数理形態学について対応する様相論理を考えると、双直観主義様相論理(bi-intuitionistic stable tense logic, 以下 Biskt)が得られる。

Biskt についてはタブロー計算やその決定可能性、フレーム定義可能性が Stell ら (2016)によって研究されているが、ヒルベルト式公理化やその追加公理による拡張（上述の二項関係 R に条件を課すことに対応）については十分に研究がなされていなかった。本発表では Biskt に対してヒルベルト式公理系を与え、その一部の拡張に対して強完全性と決定可能性が成立することを明らかにする。特に、Biskt の双直観主義論理断片に関しては Rauszer (1974)が与えた公理系よりも単純な公理化を与えることができる。
本発表は JSPS Core-to-Core Program ``Workshop on Mathematical Logic and its Application”による John Stell 氏（Leeds 大学）との共同研究の成果である。