

ゼータワン関数とその一般化 ～リーマンゼータ関数のオマージュ(新しい関数の定義)～ (埼玉県公立中学校数学教諭 佐々木俊二)

リーマンゼータ関数は、 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ で定義された関数である。

このリーマンゼータ関数の分母に1を加えた関数を「ゼータワン関数」(新しい関数)と定義した。
sが正の偶数(s=2m)のとき、

$$\varpi(2m)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}+1}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2m}\sum_{k=1}^m e^{\frac{\pi i(2k-1)}{2m}} \cot\left(\pi e^{\frac{\pi i(2k-1)}{2m}}\right)$$

sの正の奇数(s=2m+1)のとき、

$$\varpi(2m+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m+1}+1}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2m+1}\sum_{k=1}^l\left\{e^{\frac{\pi ki}{2m+1}}\cot\left(\pi e^{\frac{\pi ki}{2m+1}}\right)+e^{-\frac{\pi ki}{2m+1}}\cot\left(\pi e^{-\frac{\pi ki}{2m+1}}\right)\right\}+(-1)^m\int_0^{\infty}\coth(\pi t)\left(\frac{t^{2m+1}}{1+t^{4m+2}}\right)dt$$

ここで、m=1,2のとき、l=1 m=3,4のとき、l=2 m=5,6のとき、l=3 … m=2p-1,2p のとき、l=p と公式化できる。
また、この「ゼータワン関数」は、「ディガンマ関数」(ガンマ関数の対数を微分した関数： γ はオイラーの定数)

$$\psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right) \quad \text{を使うことによって,} \quad \varpi(s)=\frac{1}{s}\sum_{p^s+1=0}p\psi(1-p)$$

となる。(Σの下式は、この解を足し合わせるという意味) これは、同時にゼータワン関数の定義域を広げた式(解析接続された式)としても成り立ち、例えば、s=1のとき、

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ では発散する値が収束する値を持つが、解析接続された式では、

$$\varpi(1)=\frac{1}{1}\sum_{z+1=0}p\psi(1-p)=\gamma-1=0.57721566-1=-0.42278... \quad \text{になり、収束した値を持つ。}$$

リーマン予想とは、「解析接続されたリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ で、 $\zeta(s)=0$ をみたすsが(ゼータ関数の零点が)複素平面上の1/2の直線上にある」いうものであるが、これと同じようにゼータワン関数にも零点があるとすれば、以下のような予想が成り立つのではないだろうか考えた。

「ゼータワン関数の零点は、複素平面の0と1の間の直線上にある」

また、ゼータワン関数とリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の間に、

$$\varpi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\zeta(ns) \quad \text{という関係等式が成り立つこともわかった。}$$

例えば、s=2のとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\zeta(2n)=\frac{1}{2}+\zeta(2)-\zeta(4)+\zeta(6)-\zeta(8)+...=\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^4}{90}+\frac{\pi^6}{945}-\frac{\pi^8}{9450}+...=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\coth(\pi)=1.0766740...$$

さらに、ゼータワン関数を一般化した式 $\varpi_a(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s+a^s}$ を定義した。(ただし a>0 の実数)

これを「ゼータdenominator- α 関数」(ゼータd- α 関数)と命名した. この「ゼータd- α 関数」もゼータワン関数と同様に, 公式化できて,

s が正の偶数($s=2m$)のとき

$$\varpi_a(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m} + a^{2m}} = -\frac{1}{2a^{2m}} + \frac{\pi}{2ma^{2m-1}} \sum_{k=1}^m e^{\frac{\pi i(2k-1)}{2m}} \cot\left(a\pi e^{\frac{\pi i(2k-1)}{2m}}\right)$$

s が正の奇数($s=2m+1$)のとき

$$\begin{aligned} \varpi_a(2m+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1} + a^{2m+1}} \\ &= -\frac{1}{2a^{2m+1}} + \frac{\pi}{(2m+1)a^{2m}} \sum_{k=1}^l \left\{ e^{\frac{\pi ki}{2m+1}} \cot\left(a\pi e^{\frac{\pi ki}{2m+1}}\right) + e^{-\frac{\pi ki}{2m+1}} \cot\left(a\pi e^{-\frac{\pi ki}{2m+1}}\right) \right\} + (-1)^m \int_0^{\infty} \coth(\pi t) \left(\frac{t^{2m+1}}{t^{4m+2} + a^{4m+2}} \right) dt \end{aligned}$$

ここで, $m=1,2$ のとき, $l=1$ $m=3,4$ のとき, $l=2$ $m=5,6$ のとき, $l=3$ $\cdots$ $m=2p-1, 2p$ のとき, $l=p$ となる.

また, ゼータd-a関数は, ディガンマ関数によって

$$\varpi_a(s) = \frac{1}{sa^s} \sum_{p^s+a^s=0} p\psi(1-p)$$

と表すことができて, $\varpi_a(-s) = -a^{2s}\varpi_a(s)$ という対称性をもつ.

また, ゼータd-a関数とリーマンゼータ関数との間に, 次のような関係等式がある.

$0 < a < 1$ のとき

$$\varpi_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s + a^s} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a^{sk} \zeta((k+1)s)$$

$a=1$ のとき (ゼータワン関数になって)

$$\varpi_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(ks)$$

$1 < a < 2$ のとき

$$\varpi_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s + a^s} = \frac{1}{a^s + 1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a^{sk} \left\{ \zeta((k+1)s) - 1 \right\}$$

$a=2$ のとき

$$\varpi_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s + 2^s} = \frac{1}{2^s + 1} + \frac{1}{2^{s+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} 2^{sk} \left\{ \zeta((k+1)s) - 1 \right\}$$

$2 < a < 3$ のとき

$$\varpi_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s + a^s} = \frac{1}{a^s + 1} + \frac{1}{a^s + 2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a^{sk} \left\{ \zeta((k+1)s) - 1 \right\}$$

$a=3$ のとき

$$\varpi_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s + 3^s} = \frac{1}{3^s + 1} + \frac{1}{3^s + 2^s} + \frac{1}{2 \cdot 3^s} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} 3^{sk} \left\{ \zeta((k+1)s) - 1 - \frac{1}{2^{(k+1)s}} \right\}$$

このように「ゼータワン関数」及び, より一般化した「ゼータd- α 関数」は, リーマンゼータ関数と密接な関係があるということがわかった. この「新しい関数」が, 「リーマン予想」の研究に何らかの形で関与できれば幸いである.

この詳細は, <http://ameblo.jp/titchmarsh/entry-12251869172.html> にアクセスしてpdfファイルをダウンロードしてください