

「構造の可能性」としての数学的真理

岡本賢吾 (Kengo Okamoto)

首都大学東京

私たちは普段、様々の言明（あるいは、言明の一定の集まりである理論）について、「それは真である／真でない」という判断を下す。こうした真理概念の適用事例のうちには、明らかにあまり興味のないもの、つまり、特に真理概念を用いなくても十分適切に言い表せるものもある一方で、決してそうでないもの（少なくとも、そうした言い換えが容易には見当たらないもの）もあるだろう。では、数学の場合には事情はどうだろうか。

数学に関わる真理概念は、まず大まかには、二つの種類に分けることができると考えられる。

(1) 一つめは、一定の(メタ)数学的な理論において厳密に定義された真理概念(タルスキの意味での真理述語や、さらにはその一般化によって定義されているような真理概念)であり、例えば、よく知られたペアノ算術についてのメタ定理、

$\Sigma 1$ 完全性: ペアノ算術は、標準モデル \mathbb{N} において真であるあらゆる $\Sigma 1$ 文を証明することができる。

で問題となっている真理概念が、まさにその例である。ふつうここでは、一つの対象理論 T と、この T について論じる (T の様々な数学的特徴付けを与えることができる) メタ理論 S とが用意され、真理述語は S の中で定義されることとなる。

(2) もう一つは、以上と異なり、とりあえずインフォーマルで直観的(前理論的)な仕方で理解され、また適用される真理概念であり、これはさらに二つに区別することができる。すなわち、(2-1) ひとつめは、何らかの基本的な数学的概念(自然数、連続体、点/直線、等々)について私たちが前理論的に持つ理解と、当該の概念を精確化することで得られる一定の数学的理論(その最も徹底された形は、おそらく形式的理論ということになるだろう)とが、果たして一致しているか否か、という意味での真理概念である。この場合、そうした一致が十分に認められるときには、「当の理論は、(我々の理解に照らして)真である」と言われ、一致が認められないときには「真ではない」と言われることになる。例えば、フレーゲがユークリッド幾何と非ユークリッド幾何とを対比して、前者こそが「真理である」と主張したのは、基本的にはこうした趣旨においてであったと思われる。すなわち彼は、私たちの前理論的な空間理解に照らすとき、ユークリッド幾何の平行線公理は当然、真以外ではありえないと(あまりに無造作に)信じ、従ってまた、たとえ非ユークリッド幾何が一個の数学的理論として非の打ちどころのないものである(無矛盾であるだけでなく、種々の興味ある数学的モデルや物理的適用を持つ)としても、決してそれを「真の幾何学」と呼ぶことはできない、と考えたのであろう。このフレーゲの考えには、一つのはっきりした誤認があると思われる。それは、ある数学的概念についての我々の前理論的理解が、この概念についての数学的理論がいかなるものであるべきか——例えば、どのような公理を採用すべきか——を、少なくともその基本的な部分について一意的に決定するはずだ、という思い込みである。実際には、その後の数学の歴史が次々に明らかにしていったとおり、むしろ私たちの前理論的な理解というもののはしばしば十分に確定的ではなく、つまり、理論を決定するため基礎データとしては不十分である(決定不全 *underdeterminate* である)ということであり、それどころか、理論の展開に促される形でそれは様々に拡張される、ということである(こうした点は、ワイトゲンシュタインの数学の哲学が、まさにフレーゲ批

判の形で徹底して追究した主題の一つであった)。ただし同時に、ここで次の点は十分銘記されるべきである。すなわち、たとえ理論形成のためのデータとしては不十分なものであっても、私たちが数学的概念について持つ前理論的な理解は、この概念についての厳密な理論形成を行う上で、多くの場合、やはり決定的な指針(理論の適切性の判定基準)として働く、ということである。実際、フレーゲが算術の形式化の際に基本に据えたいわゆるヒュームの原理——「二つの性質(クラス) F と G が同じ基数を持つのは、 F と G の間に全単射が存在するとき、かつそのときのみである」——は、現代の私たちの目から見ても、依然としてまさにそのような算術の形式化のための指針(形式化の適切性の判定基準)として機能していると言えるだろう。

(2-2) さらに、(2-1)とあまり区別されないことが多いが、ここにはもう一つ、興味ある真理概念の用法が含まれていると考えられる。それはすなわち、数学の応用(適用)が必要となる何らかの問題が生じている場合に関するものであって——この問題自身は、ごく日常的なものであってもよいし、またもちろん、もっと洗練された科学的(物理的、経済学的、等々)なもの、さらには、数学内部のもの(つまり、ある数学的理論の他の数学的理論への適用)であってもよい——、その際、適用候補となっている数学的理論が、確かにこの適用に適合したものであれば(あるいは「モデル」という語を用いて言い換えると、この語の元来のタルスキ的な意味合いよりやや拡張された用い方となるが、当該理論が当該の適用事例を自らのモデルとして持てば)、「この理論は、(この適用に関して)真である、妥当である」といった言い方がされる。例えば、少々トリヴィアルであるが、2つのグループのグラスたちに注がれた水全体の「多さ」を定めることが問題となっていたとしよう。このとき、各グループのグラスの個数を数えた上で、自然数論を用いてその和を与えることは的外れであり、むしろ、質量や体積といったものを扱う数学理論(+物理学)を適用することが適切である。言い換えれば、この適用に照らすとき、自然数論は真(**be true of**)でなく、連続数学こそが真であることになる。ここで注意すべきなのは、いま問題にしているような真理の概念(応用に対する数学理論の適合性、もっと簡単には、数学理論の適用可能性)は、一見些末に見えながら、実際にはある意味で、数学をめぐって見出される真理概念の用法として最も重要なものだという点である。実際、多くの新しい数学理論が開発されていくとき、それを動機づけて主たる理由は何に存するだろうか。典型的にはそれは、何か大きな数学的問題の解決のためであり、このときしばしば、そうした問題解決とは、新しく開発された理論を数学内部で(当の問題が属する従来理論に対して)適用する、という形を採る。つまり、多くの場合、新しい数学理論の価値は、まさにそうした適用可能性にあり、そうした適用が見出されることによって新しい理論は、(単なる形式・論理的可能性以上の)実在性、実質的な可能性を認められることになると考えてもよいだろう。こうして、数学理論の真理性の問題は、ふつうそう信じられがちであるようにもっぱらその認識論的な確実性・不可疑性の確立という課題との関連で重要となるわけではなく、むしろ、他の科学や他の数学理論との関りにおいてその理論が果たしうる理論的役割ということにポイントがあることが分かる。

ところでそうだとすると、上で(1)として挙げた、タルスキ的真理述語(の一般化)が具現しているような数学的真理概念の意義を、改めてどのように捉え直すことができるだろうか。詳しくは当日に譲るが、とりあえず一言だけ述べれば、いま見てきた(2-1)、(2-2)のような真理概念の前提となる、厳密で一般性の高い真理概念の特徴づけを提供し、それを通じて、「数学的構造の可能性」という、数学の哲学においておそらく最も興味深い概念の一つへのアクセスを与えていることが、その第一の意義と言えるのではないかというのが、提題者の見通しである。当日は、特に、非古典論理における(拡張された)真理概念の例などを取り上げ、こうした点をできるだけ判りやすく検討したい。

(以上)