ブラウワーの基本仮定について

秋吉亮太
日本学術振興会特別研究員 PD（京都大学文学研究科）

よく知られているように，オランダの数学者ブラウワーは「直観主義」という数学基礎論上の独特の立場を考案し，それを元に数学を再構成しようとした．そのために，ブラウワーはいくつも独自の道具立てを導入した．よく言われるように，選列の理論(the theory of choice sequence)は，正にブラウワーによって導入された．この選列の理論を展開するにあたって重要なのがファン定理と呼ばれる原理であるが，ブラウワーはファン定理を別のずっと強い定理から導出した([2])．それがバー帰納法（Bar Induction，以下 BI）である．BI とは，要するに整礎な木の上の帰納法であり，ファン定理よりも証明論的にもずっと強い原理である．

ブラウワーは[2]において BI を証明しようとしたものの，そこには一つの証明されないままに終わっている仮定が存在する．それが，本発表が基本仮定(Fundamental Assumption，以下 FA)と呼ぶものであり，ある形をした論理式の証明がごく単純ないくつかの推論規則のみからなっていることを主張する．ブラウワーの議論は，FA を仮定してしまえば議論の余地のないものであるとされてきたが, FA は謎めいたものとされてきた．なお，このブラウワーの議論は，様々な点で興味深いが，いわゆる BHK 解釈（特に「→」の場合）の源泉の一つとなっていることが知られている．

この FA の正当化を巡ってはいくつかの態度が存在する．一つは多くのロジシャン（クリーネ，トルルストラ他）に代表されるように，BI を公理として受け入れ FA については不問にするというものである([7])[1]．もう一つは，ごく最近になって哲学者であるファン・アッテンとスントホルムによって提唱された，FA をカント的な意味での超越論的要請とみなし，ブラウワーの議論全体を超越論的論証として解釈する試みである([5])が，やはりブラウワーが自身の議論をそのようにみなしていたという直接的な典拠は（彼らが告白するように）存在しない[2]．

このような状況を背景に，本発表では，ブラウワーの議論に対する別のアプローチを提案し素描する（[1]）．そのアプローチとは，無限的証明論(infinitary proof theory)を用いるものである．ドイツの証明論者ブフホルツは 1970 年代末に「Ω規則」と呼ばれる一種の無限的規則を考案し，再帰的定義の理論 ID(the theory of inductive definitions)の順序数解析を行った．特に，Ω規則によって ID の超限帰納法の公理が解釈できる．本発表では，ブラウワーの議論と，ブフホルツによる ID の埋め込み定理を比較する．驚くべきことに，これらは非常に似ており，ブラウワーも一種のΩ規則

---

[1] ただし，トルルストラは興味深いリマークを[6, pp.24-25]で与えている．尚，本発表の主張は，このリマークとも整合的である．

[2] ブラウワーの認識論は確かにドイツ観念論的であるとの指摘がある．もちろん，だからといって，ブラウワーの議論を超越論的論証として解釈してよい根拠とはならないだろう．

を導入していたと見なせる．特に，つぎの点において両者は似ているといえる．(i) Ω規則は算術的な証明図上を量化しているが，この点はブラウワーの議論にも見いだせる．(ii) 双方共に，キーとなる概念は一種の「代入操作」である．これらの相似点をふまえると，ブラウワーの FA の意味は，Ω規則の文脈でごく自然に解釈することができるのである．Ω規則においては証明図上を量化しているために，この量化の範囲にはΩ規則自身は入ってならないが，ブラウワーの FA の意味も全く同様に理解できる[3]．従って，本発表の提案に従えば，FA は数学的に動機づけられる仮定であり，ブラウワーの議論全体も数学的なものとみなせる．時間が許せば，この提案を数学的に厳密に実行する可能性，またこれまでの先行研究との関係にもふれたい.

参考文献

1. 秋吉亮太，「ブラウワーのバー帰納法における基本仮定の理解に向けて」，『哲学論叢』，第 40 号，81-92 頁，2013 年.

2. L. E. J. Brouwer, Über Definitionsbereiche von Funktionen, *Mathematische Annalen*, vol. 97 (1927), pp. 60–75, English translation with introduction by Charles Parsons in [29].

3. W. Buchholz, The $\Omega_{\mu+1}$-rule, *Iterated inductive definitions and subsystems of analysis: Recent proof-theoretical studies*, W. Buchholz, S.Feferman, W. Pohlers, and W. Sieg (eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 897, Springer, Berlin, 1981, pp. 188–233.

4. C. Parsons, An introductory note to [2], *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931*, Jean van Heijenoort (ed.), HUP, 1967, pp. 446–53.

5. G. Sunhdolm and M. van Atten, The proper explanation of intuitionistic logic: On Brouwer's demonstartion of the bar theorem, *One hundred years of intuitionism (1907–2007)* , M van Atten et al. (eds.), Birkhäuser, 2008, pp. 60–77.

6. A.S. Troelstra, *Choice sequences: A chapter of intuitionistic mathematics*, Oxford Logic Guides, Vol. 3, OUP, 1977.

7. A. S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, Vol.1, North-Holland, 1988.

[3] 実は，パーソンズは[4, p.451]において既に，FA が何らかの「→」の非可述性に関係していること，さらに FA がω規則をもつ算術上の証明図に関係していることを示唆しているが，本発表の提案は，いわばこの示唆を具現化したものであると見なせるかもしれない.