相対論的量子論の数学的基礎

清水哲男（Tetsuo Shimizu）

多元テンソル代数システム(multi-fold tensor algebra)は，複素多重四元数(complex-multi-quaternion)と，微分テンソル代数システム(differential tensor algebra)との，接合積(joint algebra)として定義される．この多元テンソル代数システムを用いて，任意の次元の「擬リーマン計量テンソル(pseudo Riemannian metric tensor)」およびそれに双体する(dual)「ダランベール型微分演算子(d'Alembertian)」の「平方根」を，それぞれ「線型の」微分形式型演算子，および「線型の」微分ベクトル場型演算子として得ることができるが，これを「基本定理(fundamental theorem)」として証明することができた．

この基本定理を用いて, 多元テンソル代数システムに, ディラック解析多様体(Dirac's analytical manifold)の構造 –それは，消滅/生成演算子(annihilation/creation operator)の組(pair)と，一般化ミルトニアン演算子(generalized Hamiltonian)および相互作用演算子(interaction operator)の存在によって，定義される‐ を入れることができた．多元テンソル代数システムにおける，この構造の存在の証明によって,「発散の困難」の全くない，したがって,「数学的特異点」の全くない，相対論的場の量子論(relativistic quantum field theory)の構築が，ついに可能になった．

複素多重四元数は，複素多重スピン演算子代数システム(complex-multi Pauli's spin operator algebra)と，一対一に対応づけることができる．これを用いて，(1,1)次元のディラック解析多様体を，(3,3)次元ディラック多様体すなわち 3 次元ユークリッド空間内の空間-物質システムに対応した場の量子論, ((1,3), (1,3))次元のディラック多様体すなわち(1,3)次元の擬リーマン計量テンソルをもつミンコフスキー時空内の時空-物質システム(space-time-matter system)に対応した相対論的場の理論, 等々に, 次々と，ごく自然に，見通しよく，拡大することができた．この場合の，時空-物質システムの消滅/生成演算子の組，すなわち「解」の存在の一例は,

$$
\begin{cases}
a_{4-} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(d_{4-} + \partial_{4+}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sigma_t\left(d_t + \partial_t\right) - \iota\sigma_s\left(d_{\vec{r}} - \partial_{\vec{r}}\right)\right\}, \\
a_{4+} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(d_{4-} - \partial_{4+}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sigma_t\left(d_t - \partial_t\right) - \iota\sigma_s\left(d_{\vec{r}} + \partial_{\vec{r}}\right)\right\},
\end{cases}
$$

で与えられる．これらの演算子の対称交換子積(symmetric commutation product)および反対称交換子積(anti-symmetric commutation product)は,

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2}\left\{a_{4-}, a_{4+}\right\} = \dfrac{1}{2}\left(d_{4-}^2 - \partial_{4+}^2\right) = \dfrac{1}{2}\left\{\left(d_t^2 - d_{\vec{r}}^2\right) - \left(\partial_t^2 - \partial_{\vec{r}}^2\right)\right\} \triangleq h_4, \\
\dfrac{1}{2}\left[a_{4-}, a_{4+}\right] = 2 - \sigma_{st}\left(\partial_t d_{\vec{r}} + \partial_{\vec{r}} d_t\right) + \iota M_{\vec{r}} = 2 - \sigma_{st}\vec{N}_+ + \iota\vec{M}_{\vec{r}} \triangleq A_{4+-},
\end{cases}
$$

と計算できて，それぞれ，h_4 :一般化ハミルトニアン演算子，および A_{4+-} :相互作用素演算子，を与える．また，

$$\begin{cases} [h_4, a_{4-}] = -a_{4-}, [h_4, a_{4+}] = +a_{4+}, \\ \frac{1}{2}[a_{4-}, a_{4+}] = \frac{1}{2}[\partial_{4+}, d_{4-}] = A_{4+-}, \end{cases}$$

であるから，この「解」の一組が，一般化ハミルトニアン演算子について消滅/生成演算子としてふるまい, 相互作用素によって関係づけられていることがわかる. さらに，この「解」は，$\vec{N}_+ = 0, \vec{M}_{\bar{r}} = 0,$ の場合，つまりその「解」に対応する量子が相対論的に直線運動している場合においては，2 量子単位の総エネルギー(=総質量)スペクトル系列をもっていて，それに対応する「時空-物質システム(space-time-matter system)」が，相対論的に量子化されていることを表している．このような「解」の組をもつような多元テンソル代数システムを,「ディラック解析多様体」と名付けよう.

こうしたディラック解析多様体を, つまり(1,3)次元の擬リーマン計量をもつミンコフスキー時空-物質システムを，(3,3)次元擬リーマン計量をもつ，つまり 3 次元の時間をもつ場合にも，さらには(6,3)次元擬リーマン計量をもつ場合にも，自然に拡張することができる．特に，(3,3)次元の場合の，その「解」の具体例は,

$$\begin{cases} \partial_{(3,3)\pm} = \sigma_t \partial_{\bar{t}} \pm \iota \sigma_s \partial_{\bar{r}} = \sigma_t \left(\sigma_u \partial_u + \sigma_v \partial_v + \sigma_w \partial_w \right) \pm \iota \sigma_s \left(\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y + \sigma_z \partial_z \right), \\ d_{(3,3)\mp} = \sigma_t d_{\bar{t}} \mp \iota \sigma_s d_{\bar{r}} = \sigma_t \left(\sigma_u d_u + \sigma_v d_v + \sigma_w d_w \right) \mp \iota \sigma_s \left(\sigma_x d_x + \sigma_y d_y + \sigma_z d_z \right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{(3,3)-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(d_{(3,3)-} + \partial_{(3,3)+} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sigma_t \left(d_{\bar{t}} + \partial_{\bar{t}} \right) - \iota \sigma_s \left(d_{\bar{r}} - \partial_{\bar{r}} \right) \right\}, \\ a_{(3,3)+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(d_{(3,3)-} - \partial_{(3,3)+} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sigma_t \left(d_{\bar{t}} - \partial_{\bar{t}} \right) - \iota \sigma_s \left(d_{\bar{r}} + \partial_{\bar{r}} \right) \right\}, \end{cases}$$

で与えられ，それは時間と空間について，見事なまでの対称性をもっている．

さらに興味深いことに，ディラック解析多様体は，その相互作用素を不変に保つ「ゲージ変換」といえるような内部自由度をもっていて，それらの変換には，運動量素が時空量素に変換されるもの(タイプⅠ)と，時空量素が運動量に変換されるもの(タイプⅡ)とが存在する．もし，タイプⅠのゲージ変換が「重力場: $-g$ 」の存在に，タイプⅡのゲージ変換が「一般電荷: (e, e', e'') 」の存在に，それぞれ対応させられうるならば，タイプⅠのゲージ変換は，運動量素が時空素の「普遍的縮み」として作用することになって，それは重力場の存在を説明し，タイプⅡのゲージ変換は，3 次元時間の存在とあいまって，それぞれの自由度が 3 種類の電荷つまり(電磁場，弱電荷，強電荷)による相互作用の存在を説明する．かくして，ディラック解析多様体論は，自然界における重力および諸電荷力を統合することができ，「発散の困難」も「特異点の困難」も全くない，相対論量子場の理論の，無矛盾な，健全な，その数学的基礎となろう．