

アウディの数学的構造主義とその周辺

深山 洋平 (Yohei Fukayama)

北海道大学大学院文学研究科博士後期課程

数学における構造主義は「数学が何についてのものか」という問いに対して、数学は構造についてのものであると答える。構造は主として集合論の言葉で特徴付けられてきたが、1940年代に興った数学である圏論 (category theory) の言葉を用いて構造について語る人も現れた。アウディ (Steve Awodey) は1996年に圏論を用いる構造の考え方を表明し、それは後にヘルマン (Geoffrey Hellman) やシャピロ (Stewart Shapiro) の批判を受けることになった (Hellman, 2003, 2006/2009 ; Shapiro, 2005)。アウディは、位相空間のような、通常の数学に現れる構造を研究する道具立てとして圏を用いる。例えば位相空間と連続写像の圏において、その対象は (通常は開集合系によって導入される) 位相の公理に従うものであれば何でもよいのであって、それがどのような要素から成り立っているかといった細部は不問となる。そのような位相空間の圏の研究で得られた知識は、様々な構成を持つ位相空間に共通して当てはまる一般的な知識となる。そのような一般性をアウディは図式的 (schematic) と称して強調するようになる (Awodey, 2004)。数学が構造の科学であり、構造に対する言明が図式的になるがゆえに、圏論による数学はその全体が図式的なものとなる。

ヘルマンとシャピロの批判に共通する点は、対象化された言語の集合論的解釈 (あるいはそれに類する理論による解釈) として構造を捉えることである。このように数学理論の一分野の中で構造を考える方法を、特にシャピロはメタ数学において数学的実在への問いを可能にする方法として重視しており、圏論の言語で解釈としての構造の概念を明示的な仕方と与えていないように見えるアウディの方針を退ける。本発表ではアウディの圏論による構造へのアプローチと彼の図式的な数学の考え方を概観し、シャピロらによる批判が正当なものであるか否かを検討する。構造に対するアウディの考え方を理解する際にはロウディン (Andrei Rodin) の考察を一助とする。圏論が数学的構造主義に寄与するという考えを誤りと断じる彼は、圏の使用によっては数学的構造が定まらぬと主張し、それを根拠にアウディを批判している。私見ではこの批判は適切でなく、アウディが追求する図式的数学に対する誤解に基づくと考えられる。

参考文献

- Awodey, S. (1996). Structure in mathematics and logic: A categorical perspective. *Philosophia Mathematica*, 4, 209-237.
- Awodey, S. (2004). An answer to Hellman's question: 'Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?' *Philosophia Mathematica*, 12, 54-64.
- Hellman, G. (2003). Does category theory provide a framework for mathematical structuralism? *Philosophia Mathematica*, 11, 129-157.

- Hellman, G. (2009). What is categorical structuralism? In J. van Benthem, G. Heinzmann, M. Rebuschi & H. Visser (Eds.), *The age of alternative logics: Assessing philosophy of logic and mathematics today* (pp. 151-161). Dordrecht: Springer. (Original work published 2006)
- Rodin, A. (2011). Categories without structures. *Philosophia Mathematica*, 19, 20-46.
- Shapiro, S. (2005). Categories, structures, and the Frege-Hilbert controversy: The status of meta-mathematics. *Philosophia Mathematica*, 13, 61-77.