Primitive Chaos について

小笠原 義仁（Yoshihito Ogasawara）

早稲田大学理工学術院

カオス理論において基本的な写像としてよく知られている tent map $\varphi : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \min\{2x, 2(1-x)\}$, baker map $\varphi : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto 2x\ (0 \le x \le 1/2),\ 2x-1\ (1/2 \le x \le 1)$, logistic function $\varphi : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto 4x(1-x)$ は次の性質を持つ。

> 「任意の無限列 $\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2, \ldots$ に対して, $\varphi(x_0) \in \omega_1,\ \varphi(\varphi(x_0)) \in \omega_2, \ldots$ を満たすような初期値 $x_0 \in \omega_0$ が存在する。但し, 各 ω_i は $[0, 1/2]$ か $[1/2, 1]$ である。」

この性質は, 決定論, 因果律, 自由意志, 時間の非対称性等の問題を想起させる興味深い性質である。そしてこの性質の一般化として, primitive chaos と呼ばれる概念が定義されている [1, 2]。

集合 X, 部分集合族 $\{X_\lambda;\ \emptyset \ne X_\lambda \subset X,\ \lambda \in \Lambda\}$, 写像族 $\{f_{X_\lambda} : X_\lambda \to X,\ \lambda \in \Lambda\}$ が性質 (P) を満たす時, $(X,\ \{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\},\ \{f_{X_\lambda} : X_\lambda \to X,\ \lambda \in \Lambda\})$ を primitive chaos と呼ぶ。

(P) 任意の集合列 $\{\omega_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ に対して初期値 $x_0 \in \omega_0$ が存在して, $f_{\omega_0}(x_0) \in \omega_1,\ f_{\omega_1}(f_{\omega_0}(x_0)) \in \omega_2, \ldots$ が成り立つ。

この primitive chaos を保証するための条件を示す命題として, 次が成り立つ [1]。

命題 1 *X は可算コンパクト空間であり, $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ は閉集合族であるとして, 各 f_{X_λ} が連続全射とするならば, 性質 (P) は満たされる。*

連続全射 f_{X_λ} の存在を保証するための命題としては, 次が知られている [3]。

命題 2 *A と X を nondegenerate Peano continuum とすると, 任意の m 個の点 $a_1, \ldots, a_m \in A$ と $x_1, \ldots, x_m \in X$ に対して, 連続全射 $f : A \to X$ が存在して, 各 i について $f(a_i) = x_i$ が成り立つ。*

さらに, 次の補題が成り立つ [3]。

補題 1 *X を Peano continuum とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, Peano subcontinuum からなる X の被覆 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ が存在して, 各 X_i の直径を ε 未満にする事が出来る。*

従って, まとめると次の定理が得られる [1]。

定理 1 X を *nondegenerate Peano continuum* とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 直径が ε 未満の *nondegenerate Peano subcontinuum* からなる X の被覆 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ が存在する。そして各 i について, 任意の m^i 個の点 $x_1^i, \ldots, x_{m^i}^i \in X_i$ と $y_1^i, \ldots, y_{m^i}^i \in X$ に対して, 連続全射 $f_{X_i} : X_i \to X$ が存在して $f_{X_i}(x_1^i) = y_1^i, \ldots, f_{X_i}(x_{m^i}^i) = y_{m^i}^i$ が成り立ち, (P) が満たされる。

一方で, 連続全射の存在を保証するための補題として次が成り立つ [4]。

補題 2 A を 0 次元で完全なコンパクト T_1 空間とすると, 任意のコンパクト距離空間 X に対して, 連続全射 $f : A \to X$ が存在する。

さらに, 0 次元で完全なコンパクト集合からなる部分集合族の存在を保証するための補題として, 次が成り立つ [4]。

補題 3 X を 0 次元で完全な T_0 空間とすると, 任意の自然数 n に対して, 閉かつ開なる集合による X の直和分割が得られる。

まとめると次の定理が得られる [5]。

定理 2 X をカントール集合とすると, 任意の自然数 n に対して, 閉かつ開なる集合による X の直和分割 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ が存在して, 連続全射 $f_{X_i} : X_i \to X,\ i = 1, \ldots, n$ が得られて, 性質 (P) が満たされる。

参考文献

[1] Y. Ogasawara: Sufficient conditions for the existence of a primitive chaotic behavior, J. Phys. Soc. Jpn. **79** (2010) 15002; Y. Ogasawara, S. Oishi: Addendum to “sufficient conditions for the existence of a primitive chaotic behavior”, J. Phys. Soc. Jpn. **80** (2011) 67002.

[2] 小笠原義仁, 大石進一「Primitive Chaos への探求」日本数学会 2012 年度年会講演アブストラクト.

[3] S. B. Nadler Jr., *Continuum theory*, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[4] 北田韶彦「位相空間とその応用」朝倉書店, 2009.

[5] Y. Ogasawara, S. Oishi: Space guaranteeing a primitive chaotic behavior, arXiv:1203.0087v1.

[6] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. York, *Chaos*, Springer, New York, 1997.

[7] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1999.

[8] 小笠原義仁「ものの見方としての位相空間論入門」培風館, 2011.