巨大基数と現代集合論

薄葉季路（Toshimichi Usuba）
名古屋大学高等研究院

本公演では、現代集合論で非常に重要な役割を果たしている「巨大基数」と呼ばれる「非常に大きな順序数」の概説、および「なぜ巨大基数でなくてはならないのか？」という疑問に関しての私論を展開していく。

最初の巨大基数は20世紀初頭にF. Hausdorff, P. Mahloなどによる超限順序数の研究において定式化された。それらはG. Cantorの「数の概念の無限への拡張」の精神をさらに推し進めていく過程で自然に導出されたものである。その後、1930年代のS. Ulamによるルベーグ測度の測度論的な考察や1960年代のA. Tarskiによる一階論理のコンパクト性の拡張の研究などにおいてもさまざまな巨大基数が導入、考察されていった。これらは純粋に「数学的問題の解決のための自然な要請」といった形で導入、考察されていったものであったが、この状況は1938年のK. Gödelによる構成可能宇宙の研究、1963年のP. Cohenによる強制法の研究、そして1965年のR. Solovayの結果を境に大きく変わっていくことになる。　Solovayは Cohenの強制法と巨大基数を併せて用いることで「全ての実数の集合がルベーグ可測である」ことの相対的無矛盾性を証明したが、これを契機に、さまざまな命題がZFC集合論から証明も反証もできない独立命題であることが強制法+巨大基数という手法で明らかになっていった。また、その過程で技術的な巨大基数も導入、考察されていくことになる。

20世紀初頭のG. CantorやH. Lebesgueの研究に端を発する「定義可能な実数の研究」もまた巨大基数に大きな影響をうけることになった。Gödel の研究によってこの路線の一応の限界が示された後、その限界を破って先に進むためには巨大基数が必須であることが判明したのである。特に、1970年代以降のカリフォルニア周辺の研究者による決定性公理の研究によって、巨大基数の存在が実数構造に非常に大きな影響を与えることが浮き彫りになっていった。

本公演では、上のような流れから「問題解決のための自然な要請、あるいは作業仮説」であった巨大基数の存在意義が「存在してしかるべきもの、集合論を推し進めるための必須概念」という形に大きく変化していった歴史的な流れ、およびそのようになっていった理由についての概説を試みる。また、集合論の展開の方針として巨大基数が選ばれ、かなりの成功を収めたわけであるが、一方で巨大基数ではなく別の方針によって集合論を展開していく方針もあったはずである。「なぜ巨大基数でなくてはならないのか？」「他の方針はなかったのか？」といったことに関しても私論を試みる。