冪集合公理は論点先取か？

南尚亮（Takaaki Minami）

冪集合公理は、ω(0 を含む自然数全体の集合)の部分集合の全ての存在が保証される前にωの冪集合 $P(\omega)$の存在を主張するので、一種の論点先取になっている。このことについて論ずる。

1. <u>冪集合公理の本質は無限集合の冪集合の存在を保証することにある。</u>
   ZF 集合論に於いて、有限集合の冪集合の存在は冪集合公理に頼らずに保証される。有限集合 X の要素数 n に関する数学的帰納法で示す。
   (1) $n=0(X=\phi)$の場合は
   $P(X)=P(\phi)=\{\phi\}=\{\phi,\phi\}$
   であり、これは(空集合公理と)対公理から存在が保証される。
   (2) $n>0$ の場合
   $X=X'\cup\{x\}$とする：X'は(n-1)要素集合で x は X'に含まれない X の要素。
   X の部分集合は
   ・ x を含まないもの(X'の部分集合)と
   ・ x を含むもの(X'の或る部分集合 Y に対して $Y\cup\{x\}$)とに分かれるので
   $P(X)=P(X')\cup\{Y\cup\{x\}\mid Y\in P(X')\}$
   であり、これは帰納法の仮定(P(X')の存在は冪集合公理に頼らずに保証されること)、対公理、和集合公理、及び置換公理から存在が保証される。

2. 冪集合公理を認める、即ちωの冪集合 $P(\omega)$の存在を認めると、対角線論法(これは等号付き<u>古典</u> 1 階述語論理の定理である)により $P(\omega)$は非可算集合でありωには非可算個の部分集合が存在する。

3. 一方、ZF 集合論に於いては冪集合公理に頼らなければωの非可算個の部分集合の存在は保証されない。可算集合に対して冪集合以外の演算を施しても高々可算集合しか得られないことを示せば良い。
   (1) 対公理：可算集合 a と b に対して、$\{a,b\}$は二元集合であり、高々可算集合である。
   (2) 和集合公理：a が可算集合でその各要素 b0,b1,…が可算集合であるとすると、$\cup a=b0\cup b1\cup\ldots$は可算集合である(可算和定理)。
   (3) 置換公理：a が可算集合で f が 1 価写像ならば、$\{f(b)\mid b\in a\}$は高々可算集合である。

4. つまり、冪集合公理は
   ・ ωの部分集合の全ての存在が保証される前に

・ それらから成る集合(ωの冪集合)$P(\omega)$の存在を主張する。

これは一種の論点先取ではないか？「集合の存在が主張される前にその要素の存在が保証されるべきである」と云う一種の構成的立場から云えば、明らかに論点先取である。

　ZF 集合論の世界観として「空集合ϕを起点としてボトムアップで集合が構成されていく」と云う俗説が流布している様であるが、ZF 集合論はそこまで構成的ではない。

5. ZF 集合論に、ωの部分集合の全ての存在を保証する公理を追加して冪集合公理の論点先取を回避することは、現代の論理学では(多分)旨く出来ない：適切な公理が作れない。
   (1) $\exists y[y\subseteq\omega]$：これは$\omega$の或る部分集合の存在しか保証しない。
   (2) $\forall y[y\subseteq\omega\supset y=y]$：これは$y=y$が無条件に成り立ってしまうので、$\omega$の全ての部分集合の存在の保証とは認め難い：等号付き述語論理に於ける恒真式であり、それ以上の何事かを主張するとは思えない。
   (3) $\forall y[y\subseteq\omega\supset\exists x[y\in x]]$：これは$\exists x[y\in x]$が(対公理により)無条件に成り立ってしまうので、$\omega$の全ての部分集合の存在の保証とは認め難い。
   (4) $\forall y[y\subseteq\omega\supset\exists y]$：これは論理式ですらない。

しかし、現時点では「試してみたが駄目だった」と云うだけで、原理的に不可能であることの証明を筆者は得ていない。

6. 前項(特に(2)-(4))で問題になっていることは、ωの部分クラス(集合ではなく)が対象であることをどう記述するかと云うことである。現代の論理学では「名辞(項)として書かれた者は対象として存在する」ことが暗黙の前提とされているので、「何々は対象である」ことを記述することが困難になっている。

7. 「名辞(項)として書かれた者は対象として存在する」ことを前提としない Lesniewski 存在論に於いてはこの様な困難は発生しないと思われるが、Lesniewski 存在論の上に集合論を構築することは意外に面倒である：Lesniewski 存在論のε(is)と集合論の$\in$とをどう関係づけるかと云う点に於いて。

8. 以上、古典論理の場合を見てきたが、直観論理の場合はどうであろうか？直観論理ではこの様な問題は発生しない筈である。何故なら、対角線論法で使われている背理法「ωの部分集合が非可算個存在しないと仮定すると矛盾するので、ωの部分集合は非可算個存在する」は、「存在しないと仮定すると矛盾するので存在する」と云う直観論理では認められない背理法だからである。