算術における可述性と現実計算可能性

江口　直日

神戸大学工学研究科

R. Parikh は 1971 年の論文で現実証明可能性、現実計算可能性を問題にしている。その中では大きく分けて 4 つのことが証明されている。1 つ目は、論理式自体の長さ (複雑さ) は小さくても証明は実際には書けないほど長くなるようなものがある、というものである。2 つ目は、証明を現実的な長さに制限したとき有限の数があたかも超準数のような振る舞いをするというものである。次に、指数は $S, +, \times$ から初等的には定義できないことをモデル論的に証明している。最後に、ペアノ算術 PA で数学的帰納法に有界な論理式しか許さない体系では指数の totality が証明できないことを示した。最後の結果は今日では限定算術と呼ばれる分野が誕生するきっかけとなった。

Parikh の 4 番目の結果に関連して、E. Nelson によれば数学的帰納法 $A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(x+1)) \to \forall x A(x)$ は次の意味で非可述的である。$A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(x+1))$ が成り立つとき、論理式 $A(x)$ は帰納的であるという。すると 0 でない自然数 n は全ての帰納的な論理式 $A(x)$ に対して $A(n) \to A(n+1)$ を満たす。もし上の論理式 $A(\cdot)$ の中に制限のない $\forall x$ や $\exists x$ があらわれているならばその x は $A(\cdot)$ を含む全ての帰納的な論理式を満たす自然数を動いていることになる。つまり $A(\cdot)$ で定義されるべきものをすでに $A(\cdot)$ が含んでしまっているのである。Parikh の行ったことは上の意味での数学的帰納法がもつ非可述性を取り除くことだと理解することができる。

また S. Bellantoni と S. Cook (1992) や D. Leivant (1995) などは Nelson とは少し異なる意味での非可述性を指摘している。G. Ostrin と S. Wainer (2005) はそれに基いてある可述的算術を提案している。しかしいずれにも共通しているのは、可述的な枠組みで扱える関数は現実的に計算できるものに近いということである。

以上の概説から可述性と現実計算可能性が何らかの意味で関係していることが予想される。本講演では可述性や現実的計算可能性という問題を限定算術の観点から議論してみたい。