デデキントの論文「連続と諸々の無理数」に関する考察Ⅱ

竹之下保雄(Yasuo Takenoshita)

＊これは、2020 年に発表予定であった論文を補足したものである。

1．デデキント(Dedekind) は、切断という概念を導入し、連続や無理数を研究した。彼の論文 Stetigkeit und Irrationale Zahlen (連続と諸々の無理数) には、§4. Schöpfung der irrationalen Zahlen (諸々の無理数の創作) があり、D は有理数の二乗で整数、λ は正の整数とし、$\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$ より無理数の存在を証明した。また $y = \dfrac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$ から無理数による有理数の切断 (A_1, A_2) は、A_1 の最大数と A_2 の最小数が存在しない事を示した。ここでは、デデキントが証明に使用した２つの数式について考察する。

2．$\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$ より、有理数の二乗となる整数 D は存在しないことの証明

t, u は正の整数とし、$\left(\dfrac{t}{u}\right)^2 = D$ と仮定する。$\lambda^2 < \left(\dfrac{t}{u}\right)^2 < (\lambda+1)^2$, $\lambda < \dfrac{t}{u} < \lambda+1$

$\lambda u < t < (\lambda+1)u$, $0 < t-\lambda u < u$, $u_1 = t-\lambda u$ とすると、u_1 は整数 , $0 < u_1 < u$ …①

t_1 を $\dfrac{t_1}{u_1} = \dfrac{t}{u} = \dfrac{t_1}{t-\lambda u}$ とすると、$t_1 = \dfrac{t(t-\lambda u)}{u}$, $0 < t-\lambda u < u$ より $0 < t_1 < t$ …②

$t_1 = \dfrac{t(t-\lambda u)}{u} = \dfrac{t^2 u}{u^2} - \lambda t = Du - \lambda t$ 、これより D, u, λ, t は整数なので t_1 も整数…③

①～③より $u > u_1$, $t > t_1$ となる u_1 , t_1 があり、$\left(\dfrac{t}{u}\right)^2 = \left(\dfrac{t_1}{u_1}\right)^2 = D$ となる有理数が存在する。同様に $\dfrac{t}{u} = \dfrac{t_1}{u_1} = \dfrac{t_2}{u_2} = \cdots = \dfrac{t_n}{u_n} = \cdots$ $(t > t_1 > t_2 > \cdots > 0,\ u > u_1 > u_2 > \cdots > 0)$

$\dfrac{t}{u} = \dfrac{t_1}{u_1} = \cdots$ となる有理数が無限に存在し不合理。よって $\left(\dfrac{t}{u}\right)^2 = D$ となる $\dfrac{t}{u}$ は無理数

3． ２の式を一般化した証明。$\left(t, u, \lambda\right.$ を正の整数、$k(0 < k \leqq 1)$ と r は実数とする$\left.\right)$

$\lambda^r < D < (\lambda+k)^r$, $D = \left(\dfrac{t}{u}\right)^r$, $D^{\frac{1}{r}} = \dfrac{t}{u}$ より $\lambda^r < \left(\dfrac{t}{u}\right)^r < (\lambda+k)^r$ 、$\lambda < \dfrac{t}{u} < \lambda+k < \lambda+1$

$\lambda u < t < (\lambda+1)u$ 、$u_1 = t-\lambda u$ より u_1 は整数で、$0 < u_1 < u$

t_1 を $\dfrac{t_1}{u_1} = \dfrac{t}{u} = \dfrac{t_1}{t-\lambda u}$ とすると、$t_1 = \dfrac{t(t-\lambda u)}{u}$, $0 < t-\lambda u < u$ より $0 < t_1 < t$

$t_1 = \dfrac{t(t-\lambda u)}{u} = \dfrac{t^2 u}{u^2} - \lambda t = D^{\frac{2}{r}} u - \lambda t$

(1) $r = 2$ の場合、上記２の証明になる。

(2) $r = 1$, $k = 1$ の場合、$D^{\frac{2}{r}}$ は整数で t_1 も整数。$\dfrac{t}{u} = D$ となる有理数が無限に存在し

不合理。よって$\frac{t}{u}$が整数である数は存在しない。これは $\lambda<D<\lambda+1$となる $\frac{t}{u}=D$ が存在しない、つまり連続する２つの整数の間には整数が存在しない事の証明である。

(3) $r=\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}\text{は整数でない有理数}\right)$ の場合、$D^{\frac{2}{r}}$ は他の方法で無理数である証明が可能。

その結果 t_1 も無理数になり不合理。よって $\left(\frac{t}{u}\right)^r=D$ となる有理数 $\frac{t}{u}$ は存在しない。

(4) rが有理数でない代数的数の場合、Gel'fond – Schneider's theoremより$D^{\frac{2}{r}}$ は超越数。

その結果 t_1 も超越数になり不合理。よって $\left(\frac{t}{u}\right)^r=D$ となる有理数 $\frac{t}{u}$ は存在しない。

なお (3) (4) は上記以外の方法で、直接的に、より簡潔な証明が可能。

(5) $r=\frac{2}{e}$ (超越数)、D=２の場合、2^e が無理数かどうか不明なので証明はできない。

４． 無理数による有理数の切断 (A_1,A_2) と $y=\frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$ に関して

$y-x=\frac{2x(D-x^2)}{3x^2+D}$, $y^2-D=\frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}$, x が全ての有理数ならば y も全ての有理数

(1) A_1 から、 x に対して一つの正の数を取ると、$x^2<D$より

$\frac{2x(D-x^2)}{3x^2+D}>0$, $\frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}<0$, $0<x<y$, $x^2<y^2<D$ から y は A_1 に属する。

x < y なので、 x はA_1 の最大数ではなく、A_1には最大数は存在しない。

(2) A_2 から、 x に対して一つの数を取ると、$x^2>D$より

$\frac{2x(D-x^2)}{3x^2+D}<0$, $\frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}>0$, $y<x$, $D<y^2<x^2$ から y は A_2 に属する。

y < x なので、 x はA_2 の最小数ではなく、A_2 には最小数は存在しない。

(1) (2) より、この切断 (A_1,A_2) の両端には、最大数と最小数が存在しない。

＊有理数による有理数の切断の両端のどちらかは、最大数または最小数となる。
整数でない有理数による整数の切断の両端には、最大数と最小数が存在する。

５． ４の式の一般化 ($n>0$、mは正の整数とする)

(1) $\lambda^3<D<(\lambda+1)^3$ の場合、$y-x=-n(x^3-D)$ 、$y=-n(x^3-D)+x$ とする。

$n=\frac{1}{D+Dx+2x^2}$ より $y=\frac{x^3+Dx^2+Dx+D}{2x^2+Dx+D}$

(2) $\lambda^m<D<(\lambda+1)^m$ の場合 、$y-x=-n(x^m-D)>0$ 、$y=-n(x^m-D)+x$ とする。

$n=\frac{1}{D+Dx+\cdots+2x^{m-1}}$ より $y=\frac{x^m+Dx^{m-1}+\cdots+Dx+D}{2x^{m-1}+Dx^{m-2}+\cdots+Dx+D}$