

数学と変数

—自由変数と束縛変数—

竹内泉

本研究は数学の言語を対象とした言語哲学であり、数学に於ける変数の使用を言語哲学的に分析する。変数の使用は数学の言語に特有であり、変数の使用を分析することは数学の本質を考察することである。

本研究では様々な変数の使用の内、自由変数と束縛変数を分析する。結論としては、自由変数は代入を引き受ける変数であり、束縛変数は、その代入の機能を一時的に保留した変数である。

数学の言語には様々な変数の用法が現れる。[1, 2, 3, 4] それを分類すると下表のようになる。統計学の変数は、未だ分析に着手されていない。

| 代入とその保留 | 暗黙の引数からの函数 | (未分析) |
|---------|------------|--------|
| 恒等式の文字 | 座標変数 | 統計学の変数 |
| 方程式の未知数 | 確率変数 | |
| 多項式論の変数 | 従属変数 | |
| 命題変数 | | |
| 独立変数 | | |
| 自由変数 | | |
| 束縛変数 | | |

自由変数と束縛変数の役割は圏論的意味論によって明らかになる。

ローベア理論 [5] では、自由変数に対応する圏論的要素は、項を表す射の始点である。射の始点の機能は、後ろ向きの射の合成である。後ろ向きの射の合成は、代入を表す。即ち、自由変数の本質は、代入を引き受けることにある。

束縛構造 [6] 及び圏論的論理 [7] では、束縛を表す関手は自由変数を増やす関手の随伴であり、自由変数を減らすことを表す。即ち束縛は、自

由変数が保持していた代入を引き受ける機能を停止することである。この停止された代入の機能は、随伴の単位及び余単位によって回復させることが出来る。即ちこれは一時的な保留である。

参考文献

- [1] 竹内泉：「数学と論理学」、現代思想 35 巻 3 号 180～185 頁、2007 年
- [2] 竹内泉：「数学と変数」、哲学誌 54 巻 37～47 頁、2012 年
- [3] 竹内泉：「数学と変数」、科学哲学 48 巻 2 号 3～12 頁、2015 年
- [4] 竹内泉：「数学と変数—独立変数と従属変数」、科学哲学 54 巻 1 号 73～83 頁、2021 年
- [5] F. W. Lawvere: ‘Functorial Semantics of Algebraic Theories and Some Algebraic Problems in the context of Functorial Semantics of Algebraic Theories’, Ph.D. thesis, Columbia University, 1963 & Reports of the Midwest Category Seminar II, 1968, pp41–61
- [6] M. P. Fiore, G. D. Plotkin, D. Turi: ‘Abstract Syntax and Variable Binding’, LICS 1999, pp193–202
- [7] B. Jacobs: ‘Categorical Logic and Type Theory’, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 141, 2001