相対論的量子動力学の数学的基礎

清水哲男（Tetsuo Shimizu）

「基本ディラック対(fundamental Dirac pair)」を,「微分演算子: ∂_x」 とそれに双体する「『反』微分演算子: d_x」 の一対として定義する．それは既に「第一量子化条件: $\left[\partial_x, d_x\right]=1$ 」を充たしており，量子論的実体に対応している．基本ディラック対から構成される「対称交換子積: $S_x \triangleq \left\{\partial_x, d_x\right\}/2$ 」および「反対称交換子積: $A_x \triangleq \left[\partial_x, d_x\right]$」と，基本ディラック対の間には,

$$P_x \triangleq \begin{pmatrix} \partial_x \\ d_x \end{pmatrix}, S_x \odot_A P_x \triangleq \begin{pmatrix} \left[\partial_x, S_x\right] \\ \left[S_x, d_x\right] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \left[\partial_x{}^2/2, d_x\right] \\ \left[\partial_x, d_x{}^2/2\right] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \left\{A_x, \partial_x\right\} \\ \left\{A_x, d_x\right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ d_x \end{pmatrix} = P_x,$$

が成立しており，S_x は P_x に対して恒等演算子として作用している．基本ディラック対を基本ディラック対に変換する演算子を「ゲージ変換演算子(gauge transformation operator)」と呼ぶが，それは基本ディラック対から内部生成され，その一般形は,

$$G_x \triangleq S_x \cos\theta + {}^{\lambda}H_x \sin\theta, {}^{\lambda}H_x \triangleq \lambda\left(d_x{}^2/2\right) - \left(\partial_x{}^2/2\right)/\lambda,$$

であり，したがって，基本ディラック対の一般形は,

$$P_x(\theta) \triangleq P_x \cos\theta + {}^{\lambda}D_x \sin\theta, {}^{\lambda}D_x \triangleq {}^{\lambda}H_x \odot_A P_x,$$

で与えられる．このことから，基本ディラック対は，4 つの象限: $P_x, D_x, -P_x, -{}^{\lambda}D_x$ をもっており，任意の基本ディラック対は，それらの量子論的重ね合わせとして表現できることがわかる．さらに「任意の 2 組の基本ディラック対: $P_x(\theta), P_x(\phi)$ の間には, $G_x(\theta+\phi)$ が存在して，$G_x(\theta+\phi) \odot_A P_x(\theta) = P_x(\phi), G_x(\theta+\phi) \odot_A P_x(\phi) = P_x(\theta)$，が成立している」ことが証明できる．言い換えれば「任意のゲージ変換演算子においては，$G_x(\theta)^2 = S_x$ が成立している」あるいは「$P_x(\theta) \xleftrightarrow{G_x(\theta+\phi)} P_x(\phi)$ 」である．特に興味深いのは,「$P_x \xleftrightarrow{{}^{\lambda}H_x} {}^{\lambda}D_x$ 」の場合であり，基本ディラック対は,「空間(長さ)の量子状態: P_x」と,「運動の量子状態: ${}^{\lambda}D_x$ 」との間を往復運動しているのである．そ

れを「運動方程式(equation of motion)」で表現すると，

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta}{\Delta\tau} P_x \triangleq {}^{\lambda}H_x \odot_A P_x \equiv \begin{pmatrix} \left[\partial_x, {}^{\lambda}H_x\right] \\ \left[{}^{\lambda}H_x, d_x\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\partial_x, \lambda\left(d_x{}^2/2\right) - \left(\partial_x{}^2/2\right)/\lambda\right] \\ \left[\lambda\left(d_x{}^2/2\right) - \left(\partial_x{}^2/2\right)/\lambda, d_x\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda d_x \\ -\partial_x/\lambda \end{pmatrix} = {}^{\lambda}D_x, \\ \dfrac{\Delta}{\Delta\tau} {}^{\lambda}D_x \triangleq {}^{\lambda}H_x \odot_A {}^{\lambda}D_x \equiv \begin{pmatrix} \left[\lambda d_x, {}^{\lambda}H_x\right] \\ \left[{}^{\lambda}H_x, -\partial_x/\lambda\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ d_x \end{pmatrix} = P_x, \end{cases}$$

という２組の運動方程式が得られる．「対応原理: $\partial_x = -p_x/(\imath\hbar), d_x = q_x, \lambda = m/(\imath\hbar)$」を適用すれば，それぞれの運動方程式から，

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta}{\Delta\tau}\begin{pmatrix} p_x \\ q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[p_x, \left(m\left(q_x{}^2/2\right) + \left(p_x{}^2/2\right)/m\right)/(\imath\hbar)\right] \\ \left[\left(m\left(q_x{}^2/2\right) + \left(p_x{}^2/2\right)/m\right)/(\imath\hbar), q_x\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mq_x \\ p_x/m \end{pmatrix}, \\ \dfrac{\Delta}{\Delta\tau}\begin{pmatrix} p_x \\ q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[p_x, -\left(m\left(q_x{}^2/2\right) + \left(p_x{}^2/2\right)/m\right)/(\imath\hbar)\right] \\ \left[-\left(m\left(q_x{}^2/2\right) + \left(p_x{}^2/2\right)/m\right)/(\imath\hbar), q_x\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +mq_x \\ -p_x/m \end{pmatrix}, \end{cases}$$

が得られる．ここで，${}^{m}\mathrm{H}_x \triangleq m\left(q_x{}^2/2\right) + \left(p_x{}^2/2\right)/m$ という見慣れた演算子，すなわち「ハミルトン演算子(Hamiltonian)」を導入すれば，これらは，

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta}{\Delta\tau}\begin{pmatrix} p_x \\ q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[p_x, {}^{m}\mathrm{H}_x\right] \\ \left[{}^{m}\mathrm{H}_x, q_x\right] \end{pmatrix} / (\imath\hbar) = \begin{pmatrix} -mq_x \\ p_x/m \end{pmatrix}, \\ \dfrac{\Delta}{\Delta\tau}\begin{pmatrix} p_x \\ q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[p_x, -{}^{m}\mathrm{H}_x\right] \\ \left[-{}^{m}\mathrm{H}_x, q_x\right] \end{pmatrix} / (\imath\hbar) = \begin{pmatrix} +mq_x \\ -p_x/m \end{pmatrix} \end{cases}$$

というより簡潔な量子論的運動方程式に変形できる．第一式においては，「(長さの量)×(慣性質量: m)」に比例する「自己への『引力』」によって運動する「局所解(local solution)」が，第二式においては，やはり「(長さの量)×(慣性質量)」に比例する「自己への『斥力』」によって運動する「局所解」が得られている．つまり，第一式は，自己への引力をもっているから「ボソン（boson)」として，第二式は，自己への斥力をもっているから「フェルミオン(fermion)」として，それぞれ解釈できる．

この意味するところは，きわめて重大である．数学的意義としては，「『解析学（微分積分学)』およびそれに基づく『公理論的量子動力学』の『完全性』が，ここに証明できた」ことになる．物理学的意義としては，「第一量子化条件『のみ』を公理とした『量子動力学系』から，『一般相対論的運動論』が演繹的に，恒等式のみを用いて証明できた」．あるいは，「基本ディラック対とは，『空間の量子』が，『慣性質量』=『(自己)重力質量』つまり『等価原理』を充たす『引力/斥力』によって自由運動を行っている，その『局所解』である」ことが，数学的にかつ厳密に，証明できたのである．