ゲーデルの L とその一般化について

池上 大祐（Daisuke Ikegami）

芝浦工業大学 SIT 総合研究所

1873 年、カントールは、実数全体が可算でないことを証明した。そして、可算でない集合で、その濃度が実数全体の濃度より小さいものは存在しないことを予想した。この予想を連続体仮説という。

1937 年、ゲーデルは、集合論の公理系 ZFC の下で連続体仮説が反証出来ないことを示した。その際、ゲーデルが構成した集合論のモデルが構成可能宇宙 L と呼ばれるものである。ゲーデルの L は集合論のモデルで最も基本的なものであり、様々な良い性質を持つ。

その後、ゲーデルは、連続体仮説の真偽が ZFC では決定出来ないことを予期し、「ZFC を拡張する“妥当な”公理系の下で連続体問題を初めとする様々な問題を解決する」という研究プログラムを提唱した。今日では、ゲーデルのプログラムと呼ばれている。

“妥当な”公理系の候補としてゲーデルが考えていたのが、ZFC にある巨大基数公理を加えた公理系である。ゲーデルは、ZFC に適切な巨大基数公理を加えれば、連続体仮説の真偽を決定できるのではないかと考えた。のちに、レヴィとソロヴェイは、ZFC にどんな巨大基数公理を加えても連続体仮説の真偽が決定できないことを示した。今日では、巨大基数公理は様々な命題の真偽を決定し、集合論の公理系の無矛盾性の強さを測る指標として重要な役割を果たしている。

一方、スコットは、代表的な巨大基数である可測基数の存在を仮定すると、集合全体 V は L と等しくないことを示した。このことにより、ゲーデルの L には可測基数を初めとする強い巨大基数が存在しえないことがわかった。

1970 年代初め、ジェンセンは、ゲーデルの L をより精密に調べるために、L に対して微細構造を導入した。そして、L の微細構造の研究を進め、スクエアを初めとする重要な組み合わせ論的原理を導入し、L と V の関係を明確にする被覆補題を証明した。

さらに、ジェンセンは、可測基数を初めとする L には存在しえない巨大基数も持ちうる集合論のモデルで、微細構造を持ち、L と同じように精密に調べることのできるもの（内部モデル）を構成する研究プログラムを推進した。このプログラムは、現在、内部モデルプログラムと呼ばれている。

内部モデルプログラムの目標は、どんな巨大基数も持ちうる内部モデルを構成し、その理論を展開することである。この講演では、ゲーデルの L の基本的なアイディアについて触れた後、内部モデル理論の最近の発展について概観する。時間があれば、ウディンの提唱している ultimate L と内部モデル理論の関係についても触れる。