重力波とその量子化及び電子の異常磁気モーメント

徳田雅彦（Masahiko Tokuda）

三重県立津工業高等学校

１．哲学的に考える重力波とその量子化

Newton 力学での重力 Coulomb 力はどちらも逆２乗則であり、類似している。この類似性からそのため、それらが作る重力波と電磁波も似ている。しかし重力波は２階の tensor 波であり、電磁波がベクトル波である所で異なっている。これは曲がった時空の計量g^{ab}を Minkowski 計量$\eta_{\mu\nu}$を使って、弱場近似として$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$として$h_{\mu\nu}$を重力波にしている。その結果、重力波は２階の tensor 波になり、４元ベクトル波の電磁波と異なっている。これは４次元線素が２次になっているためである。これは哲学的に見れば、通常の方法には問題があることを示している。

これに対して本研究では重力波を４元ベクトル波で表せることを示す。

（1）重力波の新しい定式化

一般相対論での運動方程式は次式の測地線の方程式で表される。

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}=-\Gamma^i{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\qquad （ds：４次元線素、\Gamma^i{}_{\mu\nu}：\text{Christoffel 記号}）\qquad (1)$$

物体はこの測地線$\int ds$上で運動するので、物体の運動を支配する場が測地線の方程式に含まれていると見ることができる。一方、電磁場中の荷電粒子は$q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$と Lorentz 力で運動する。従って(1)式には電場$\mathbf{E}$と磁場$\mathbf{B}$のような場が含まれていると予想できる。すると測地線方程式は 4 元ベクトルの微分方程式なので､そこに含まれる場も１階になるはずである｡そこで､霜田の方法(「光速の原理と電荷保存則からマクスウェルの式を導く」物理教育 2006 54 など)を参考にして近似的に計算すると、電磁気学の電場や磁場、誘電率に相当するE_G, B_G, ε_Gを定義できて、次式のように重力場の Maxwell 方程式及び Lorentz 力$d^2\mathbf{x}/ds^2=\mathbf{E}_G+\mathbf{v}\times\mathbf{B}_G$を導くことができる。

$$\mathrm{div}\mathbf{E}_G=\rho/\varepsilon_G,\quad \mathrm{div}\mathbf{B}_G=0,\quad \mathrm{rot}\mathbf{E}_G=\partial\mathbf{B}_G/dt,\quad c^2\mathrm{rot}\mathbf{B}_G=\partial\mathbf{E}_G/\partial t+\mathbf{j}_G/\varepsilon_G$$

（2）重力波についての哲学的な考察

通常の方法で重力波を定式化すると四重極放射が最低次になる。一方、電磁波は双極子放射が最低次である。本研究で示す重力波は Maxwell 方程式から作られるので、双極子放射が最低次になる。

この違いについて地球と月の間に働く潮汐現象を例に考えてみる。まずこれについて Newton 力学で考えると潮汐力 potential は地球と月の間の距離 r の３乗に反比例する。この r を変動させると重力波ができる。これを Liénard–Wiechert potential の様な一般座標変換に不変になるように定式化できるはずである。すると重力波が光速で伝搬するとすれば、遅延 potential を作ることができて、最低次が双極子放射が最低次であることになる。従って従来の計量テンソル$g_{\mu\nu}$から作る重力波は 2 次であるから四重極放射になるので、$dx_\nu=g_{\mu\nu}dx^\mu$でと一次で重力波を考える方が正確であるはずである。

（3）哲学的考察に基づいた重力場の量子化

上で重力場の Maxwell 方程式を導いたので、それを量子電磁気学(QED)の方法で量子化することができそうであるが、実際は導出過程で Lorenz ゲージを行っているので、量子化できない。そこで、重力波を電磁波の Liénard–Wiechert potential で表し、観測者が質点の加速運動に対して、平行と垂直になる位置での電磁波を定式化し、それぞれの電磁波を量子化する。一般の電磁波はそれらを重ね合わせれば良い。その結果 QED の不定形量などの問題も回避できる。結果の式は係数を無視すれば

$$\phi\sim\int_{-\infty}^{\infty}dk\left\{a_{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})+a_{\mathbf{k}}^\dagger\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\right\},\quad \mathbf{A}\sim\frac{\mathbf{P}}{mc^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\left\{a_{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})+a_{\mathbf{k}}^\dagger\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\right\}$$

と表せる。なお、$a_k^\dagger$, a_kおよび$\mathbf{P}$は生成消滅演算子、$\mathbf{P}=i\hbar\nabla$（:source の運動量）である。

２．哲学的解釈に求める電子の異常磁気モーメント

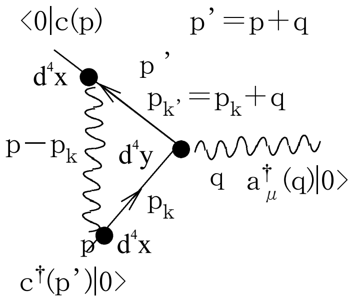
電子は Spin に伴う磁気能率を持ち，その大きさは Bohr 磁子を単位としてｇ因子で表される。ｇ因子は Dirac の相対論的量子力学による値 g=2 から仮想光子の量子効果により 0.1%ほどずれ，これを異常磁気能率と呼ぶ。これは QED で説明され、２次の近似で$g-2=\alpha_f/2\pi$が求められる。ここで、α_fは微細構造定数 1/137 である。

しかしその計算は、繰り込みという人為的な操作によって計算で出た無限大を意図的に除去して都合の良い有限の値のみを残す方法で、数学的に正しくない。この問題は今もって解決されていない。そのため Dirac は不満を抱き、Feynman や朝永もごまかしだと言っている。

しかし、本研究は古典論であるが、Newton 力学的一般相対論及び統一場理論(2015~2018 の本学

会の「総会と講演会の講演要旨」を参照)を使えば、発散の困難がなくα_f／２πを求めることができた。この方法なら高校生でもフォロー可能な計算で済む。以下これについて簡単に述べる。

(1)量子電磁気学による電子の異常磁気モーメントの計算



QED での電子と電磁場の相互作用 Hamiltonian は、次式で表せる。

$$H_I^{den}=-ceA_\mu(x)\overline{\phi}(x)\gamma^\mu\phi(x)$$

ここで、e，A_μ，γ^μ，ϕはそれぞれ、電子の電荷、電磁 potential、γ行列、Dirac 場である。これから S 行列(Green 関数)を求めると、２次の頂点補正の Feynman 図は右図のように描ける。これから Spin g 因子の繰り込み計算を行うと、α_f／２πが求められる。しかし、この計算はかなり煩雑である。また、別の方法として、質量と電荷の繰り込みと真空偏極を合わせる方法で求める方法がある。これも大変である。

(2)負エネルギーを含めた一般相対論的Bohr模型

Newton 力学的一般相対論の統一場理論に Bohr 模型を当てはめると、次式のように表せる。

$$E_{re,\,n}^2=\left\{1-\frac{\alpha_f^2}{2n^2}\right\}^2\left(mc^2\right)^2+c^2p_n^2 \qquad \left(m:電子の質量、p_n:電子の運動量、c:光速\right) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \qquad (1)$$

これから正の値を選ぶと、Dirac 方程式で求めた水素様原子のエネルギー準位の式で主量子数ｎだけにしたものと一致する。そこで、負エネルギー部分を考えるとｎ＝１での電子の軌道半径は古典電子半径r_eの 1/4 の大きさになる。従って、陽子の大きさはr_e／４=0.705fm 以上であるとできる。実際 CODATA が推奨する値は、0.8768(69) fm である。

なお、この(1)式は元々$E_{re}^2=\left\{mc^2／\sqrt{1+(v／c)^2}\right\}^2$から近似的に求めたものであり、近似を緩めると、Dirac 方程式での energy 準位の式と完全に一致する。ただし、ｖは電子の速さである。

またこの元式はｎ＝０の解も含んでおり、そのときの電子の軌道半径はr_e／２になる。

これは次式の一般相対論の Reissner-Nordstrøm 解での重力場と静電場の力がつり合って、自由状態になる距離である。ただし計量テンソルは反変 tensor であり、偏角方向を省略した。

$$ds^2=\left\{1-\frac{2G}{c^4r}\left(mc^2-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\right)\right\}^{-1}c^2dt^2-\left\{1-\frac{G}{c^4r}\left(mc^2-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\right)\right\}dr^2 \qquad (G：万有引力定数)\ (\varepsilon_0:真空の誘電率)\ (2)$$

(3)Newton力学的一般相対論の統一場理論による電子の異常磁気モーメントの計算

(2)式から電子はその位置で波長λが２r_eの定常波になっていると考えることができる。すると電子の半径はr_e／２π程度と見積もることができる。その結果、$mc^2\equiv 2\pi\hbar c／\lambda$とできる。また、

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 mc^2r_e／2}=2\times\frac{\alpha_f}{2\pi} \qquad (2)$$

が成り立つ。そこで、r_e／２π程度の周囲で電子の電荷による時空の歪みによって、真空が歪められ、Planck 定数ｈが$h\rightarrow\left(1+2\times\alpha_f／2\pi\right)$に変更されると解釈することができる。

従って、電子自身がつくる磁気モーメントμ_sは真空の歪みによって$\hbar\rightarrow\hbar'$に変更されるとすると、

$$\mu_s=\frac{e\hbar'}{2m}=\frac{e\hbar}{2m}\left(1+2\times\frac{\alpha_f}{2\pi}\right)$$

になり、ｇ因子が$g\rightarrow g'=g\left(1+\alpha_f／2\pi\right)$と変更される。補正がない電子のｇ因子はｇ＝２なので、異常磁気モーメントａは次式で表され、QED の結果と一致する。

$$a=\frac{g'-2}{2}$$

３．最後に

C.P.スノーは「賢明な人びとの多くは物理学に対していわば新石器時代の祖先なみの洞察しかもっていない」と述べている。しかし、自然哲学の研究、特に量子物理学の哲学を研究する者はそれが許されない。QED や重力場の方程式に関わる計算はかなり煩雑であるが量子物理の哲学を論ずるなら、当然これらの計算をフォローしなければ、観念的な議論だけになり、あまり意味がない。

本論で述べた方法は高校生でもフォローできるほど簡単であり、高校程度の数学と物理学を理解していれば、誰でも時空間について定量的、哲学的に議論することが可能になる。