

量子世界の層構造 - 要旨

千谷慧子 (Satoko Titani)

中部大学名誉教授

通常は、「命題は真命題と偽命題のいずれかである」ということを前提とした2値論理、すなわち古典論理に基づいて命題の真偽を判定する。2値論理は、ブール束の構造を持っていることはよく知られている。しかし、微粒子を扱う量子の世界では、この論理が成立しない。論理の分配法則が量子の世界では通用しないためである。通常は古典論理の世界に身を置いて、量子論理と量子の世界を考える。

古典集合論の世界は、空集合から始め、その部分集合全体、そのまた部分集合全体、と次々に構成される集合の全体をそのモデルとし、 V と表記する。

一方、分配律を満たさない量子の世界の論理は、オーソモデュラー束の構造を持つ。 V の中で定義されたオーソモデュラー束を Q とすると、 Q を真理値集合とする Q 値 universe V^Q が V の中で構成される。すなわち、空集合から始め、その Q 値部分集合全体、そのまた Q 値部分集合全体と次々に構成し、そこにできた Q 値部分集合の全体を V^Q とする。ここで、 Q 値部分集合は Q に値を持つ固有関数で表される。

量子力学の世界は、ヒルベルト空間 H の projection 全体が作るオーソモデュラー束 Q を真理値集合とする世界 V^Q 、と考える。 V^Q の中では、 V の中と同様に、集合論が展開され、自然数、有理数、実数も定義される。 V^Q の中で定義された自然数と有理数は、外の世界 V の中で定義された自然数、有理数と同じ性質を持つ。一方、 V^Q の中で定義される実数は、外の世界 V から観ると、Hilbert 空間 H の自己共役作用素 (self-adjoint operator) になっている。

量子力学では、ある時刻の状態 (state) は、ヒルベルト空間 H の単位ベクトル ψ で表され、物理量 (observable) はヒルベルト空間 H で定義された自己共役作用素 (self-adjoint operator) で表される。このヒルベルト空間を H とし、projection 全体が作るオーソモデュラー束を Q とすると、物理量、すなわち V の中の自己共役作用素、は V^Q の中で定義された「実数」を表す。

一つの物理量を表す自己共役作用素を A とし、その固有値を $\{a_i\}_{i \in I}$ 、各 a_i に属する単位固有ベクトルを \vec{e}_i とすると、この物理量は状態 \vec{e}_i で実数 a_i と観測される。

A の固有ベクトル (characteristic vector) から成る正規直交基底を $\{\vec{e}_i\}_{i \in I}$ とすると、この基底から生成される Q の部分束は、ブール束である。これを B とする。部分束 B に対して V^Q の部分世界 V^B を構成すると、 V^B は古典集合論の世界であり、 A は V^B の中でも「実数」を表す。

U を H のユニタリー作用素 (unitary operator) の全体とすると、各 $\sigma \in U$ に対して、 $\{\sigma(\vec{e}_i)\}_{i \in I}$ も、 H の正規直交基底であり、 $V^{\sigma(B)}$ は古典集合論の世界である。したがって、 U の各元に古典集合論の世界が対応する。すなわち、 V^Q は古典集合論の世界が重なった層になっている。

物理量を表す自己共役作用素 A は、基底 $\{\sigma(e_i)\}_{i \in I}$ に対しては normal operator $\sigma A \sigma^{-1}$ を表す。 A は、位相空間 \mathcal{U} の各点 σ に正規作用素 (normal operator) $\sigma A \sigma^{-1}$ を対応させる写像を表す。

言い換えると、 V^B で「実数」を表わす A は $V^{\sigma(B)}$ では「複素数」を表わす。したがって、物理量は、 \mathcal{U} の上の「複素数」値関数を表す。