現代の数理物理学における領域横断的な理論の発展

原田雅樹　（Masaki Harada）

関西学院大学

1926年に量子力学が誕生して間もなく、von Neumannはヒルベルト空間論によってそれに対して数学的基礎づけを与えた。しかし、彼はそれに満足せずに、作用素環論という分野を生み出し、それによって、量子物理物理学における観測可能な物理量、そしてその非可換性が露わになる数学的基礎づけを試みた。作用素環論は、積分の線形構造を露わにした関数解析におけるスペクトル理論などを駆使した無限次元の線形作用素の構成する環についての理論である。後に、富田・竹崎理論により、作用素環において、有限次元の行列環と類似な定理が多く成立することも明らかになってくる。この作用素環論は、ノルム位相で閉じた C*環、それよりも弱い強位相で閉じた von Neumann 環に分類され（実際には von Neumann 環は C*環に含まれる）、それに対してヒルベルト空間上での表現（GNS 構成）が与えられながら、大きく発展していくことになる。特に von Neumann 環は、その可換環の可換環が自分自身になるという代数的に非常に良い性質を持つがゆえにその射影作用素がとても扱いやすい性質を持ち、無限次元の量子力学すなわち場の量子論の数学的基礎づけを与えることに希望が持たれた。

現代の幾何学的空間概念において、空間自体を点の集合として直接考えるのではなく、その上の代数を考えることが本質的である。位相も、空間における点の集合として考えるのではなく、代数に入れた位相を考える。この考え方と深く関係しているのが Gelfand 変換である。Gelfand は可換な作用素環のスペクトルがその一つの極大イデアルに対応していることから、その極大イデアルが空間を構成すると考え（スペクトル空間）、その空間上の関数環を考えることにするのである。すなわち、可換な作用素環はそのスペクトル空間上の関数環に変換されるのである。その結果、可換な C*環と von Neumann 環は、それぞれ位相幾何学的空間と可測空間に対応付けられることになり、それらの環を非可換化することによって非可換位相空間や非可換可測空間といったいわばヴァーチャルな空間が措定されることになる。1980 年代から A.Connes は、その発想を微分幾何学にも広げて、ホモロジーやコホモロジー概念（微分幾何学において重要な役割を果たすド・ラム・コホモロジーの類似としてのサイクリック・ホモロジー）を駆使しながら非可換微分幾何学を構成し、さらにディラック作用素の逆作用素を無限小距離とする計量幾何学を考案する。計量に自然にスピン構造が入った非可換微分幾何学によって、Connes は、1990 年代、素粒子の標準理論の再構成も試みる。これらはまとめて現在、非可換幾何学と呼ばれる。

場の量子論の数学的基礎づけと深い関わりを持つものが von Neumann 環である。1960 年代から、ミンコフスキー時空の領域に von Neumann 環を対応させた代数的場の理論によって場の量子論に数学的基礎付けを与えようとするみが始まる（DHR 構

成)。場の作用素には特殊相対性理論と量子力学を形成する対称性を持つ構造が要請される。Von Neumann 環は、無限次元の構造によるその中の射影作用素の特徴づけによって、大きく I 型、II 型、III 型と三つに分けられる。さらに、そこに群構造を入れて接合積を構成し、また、その双対性やエルゴード理論を考えることによって、Connes は 1970 年代、III 型 von Neumann 環の構造を、III_0 型、III_λ型（$0<\lambda<1$）、III_1 型という三つに分類することで明らかにした。そこでは、力学系的な自己同型群の周期の特徴づけ（エルゴード的のような周期的でない場合も含めて）が用いられている。この III 型の分類は、作用素環論における自己同型群の重要性を明らかにした。この自己同型群の性質を駆使し、超準解析に由来する超積の考え方も取り入れながら、II 型、III 型の中で有限次元作用素によって近似できるというよい性質を持つ作用素環（AF 環）の分析がなされていくことになる。そして、代数的場の量子論に現れる von Neumann 環は III_1 型であることが明らかになっているが、この代数的場の量子論は、今日に至るまで、相互作用のない自明な場の量子論しか再構成できていない。

ガロワ理論における体の拡大と類似なものとして構成されたものに、von Neumann 環の subfactor 理論というものがある。もともとこれは II 型について詳細に研究されたが、III 型にも拡張されることになる。ところで、現代物理学における素粒子の弦理論や物性物理の場の理論と深く関わる共型場理論というものがある。DHR 構成による代数的場の理論にさらに、共型場の持つ対称性を加えた作用素環論が現在試みられているが、これは、III 型の subfactor 理論を介して組み紐理論と深いつながりを持つことが分かってきている。また、弦理論に端を発しながら、数学的には作用素環論と全く異なる出所を持つ頂点作用素代数というものがある。頂点作用素代数自体、数学的に出所の異なる有限群論におけるモンスター群、さらには数論とも関係の深い保形関数論との繋がりがムーンシャイン現象によって明らかになってきている。この頂点作用素代数と共型場作用素環論の間には橋渡しになるような定理が見出されてきており、数学として統合されるのではないかという期待が持たれている。

以上のように、数学において、解析、代数、幾何学、数論、力学系といった異なる領域の様々な理論が相互作用しながら概念が形成されていく。関数解析は、積分論を無限次元の線形代数と見ることにより、そこに潜む代数的構造を顕わにした。関数解析に現れる無限次元の作用素の作り出す環の構造を、C*環では位相幾何学的な手段を用いて、von Neumann 環では自己同型群を用いて顕わにした。von Neumann 環の構造分析では、エルゴード理論（力学系）の非可換化も行われている。そして、無限次元の作用素環の中に有限次元で近似できる取り扱いやすいものがあることも見出された。またそこにはガロア群と類似の構造や組み紐に現れる代数構造もあることが分かってきた。そして、これらの代数的構造は場の量子論や共型場理論といった理論物理学が数学に与えるモデルの中で次第に明らかになってきたのである。また、幾何学的空間の構造はその上に乗っている代数構造によって明らかになるという視点から、スピン構造を持った非可換微分幾何学も構成され、物理学への応用も試みられている。さらに、同じ物理理論から触発されながら、数学的には全く異なる公理から出発している共型場作用素環論と頂点作用素代数において共通の構造が見出されている事実は、数学における概念の生成を考える上でとても重要なことである。