線形論理とその関連体系の決定問題

田中大海 (Hiromi Tanaka)

慶應義塾大学

Lincoln-Mitchell-Scedrov-Shankar[2] は、Minskey machine の停止問題を命題線形論理の証明可能性についての決定問題にエンコードできることを証明した。故に線形論理は命題論理のレベルで既に決定不能になる。他方で、直観主義命題論理や、命題線形論理および命題直観主義線形論理の乗法・加法的断片である $\mathbf{FL_e}$ および **MALL** はいずれも PSPACE 完全である。これらの事実は、命題論理の表現能力を向上させるために重要なことは構造規則を完全に維持または排除することではなくむしろその使用をある程度制限することである、ということを示唆している。

すると次のような疑問が浮かび上がる：どの構造規則の使用を制限することが論理体系の決定可能性（決定不能性）に強く影響するのだろうか？

本発表は、この問いに少しでも答えようとすることを目的としている。ところで上記の疑問を取り扱うためにはもはや既存の線形論理の分析のみでは不十分であろう。なぜなら通常の線形論理は交換規則と結合規則の無制限の使用を許しているからである。そこで本発表では、$\mathbf{FL_e}$ や **MALL** の代わりに、一般に結合法則と交換法則を満たさないような乗法的連言を持つ full nonassociative Lambek calculus (**FNL**) をベースとして、nonassociative-noncommutative intuitionistic linear logic (**NACILL**) を定義し、それが決定不能であることを明らかにする。ここで注意しておきたいのは、通常の線形論理では様相演算子を通じて弱化と縮約の二つの構造規則が再導入されていたのに対し、**NACILL** では弱化と縮約だけではなく、結合法則と交換法則が様相演算子を用いて導入しなおされているということである。本発表における主要な結果として、**FNL** の演繹可能性 (deducibility) に対する決定問題が **NACILL** の証明可能性にエンコードできることを示す。**FNL** の演繹可能性が決定不能であることは Chvalovský [1] により証明されたから次を得る：

定理 φ を **NACILL** の任意の論理式とする。φ が **NACILL** で証明可能であるかどうかは決定不能である。

NACILL	決定不能	直観主義線形論理	決定不能 ([2])
NACILL+交換規則	決定不能		
NACILL+縮約規則	決定不能		
NACILL+交換規則+縮約規則	決定不能	直観主義線形論理+縮約規則	決定可能 ([3])

表 1: **NACILL** とその関連体系の決定不能性

この結果から、**NACILL** は通常の線形論理と同じく豊富な表現力を持つといえる。また **NACILL** に対して三つの関連体系 (**NACILL**+交換規則、**NACILL**+縮約規則、**NACILL**+交換規則+縮約規則) を定義し、それら全てが決定不能であることも証明する (表 1)。特に **NACILL**+交換規則+縮約規則の決定不能性は、既存の結果と比較すると興味深い。実際、岡田-照井 [3] は直観主義線形論理＋縮約規則（=**NACILL**+結合規則＋交換規則＋縮約規則）が決定可能になることを示した。これら二つの結果は、（特定の状況において）結合法則の様相演算子による再導入が論理体系の決定可能性の成否に影響していることを示唆する。

NACILL の決定不能性の証明において重要なポイントは **NACILL** が **FNL** に対して強く conservative になることを確認することである。これを示すためのいくつかの証明論的・意味論的方法が考えられるが、今回はその中でも比較的簡単と思われる代数的な手法を紹介する。

参考文献

[1] K. Chvalovský. Undecidability of consequence relation in full nonassociative Lambek calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 80:567–576, 2015.

[2] P. Lincoln, J. Mitchell, A. Scedrov, and N. Shankar. Decision problems for propositional linear logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 56:239–311, 1992.

[3] M. Okada and K. Terui. The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, 64(2):790–802, 1999.