

Newton力学的一般相対論による素粒子の散乱計算

徳田 雅彦

三重県立津工業高等学校

(1)はじめに

本研究は Newton 力学的一般相対論で組み立てた統一場理論を用いれば、素粒子の散乱計算が非常に簡単にできることを示したものである。

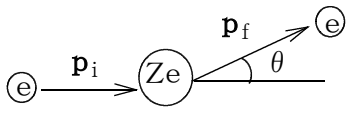
この計算は相対論的場の量子論を使って行うが、かなり煩雑である。また、数学的にやや問題もある。しかし本研究の方法は教養物理学程度の知識で十分で、非常に簡単である。しかも数学的な問題もない。

素粒子の振る舞いは量子論を基礎にしているが、Newton 力学的一般相対論の統一場理論の簡単な計算で量子物理学と同じ自然哲学を構築できる可能性を示している。

(2)ラザフォード散乱-Mott散乱-公式の導出

質量 m 、電荷 e の荷電粒子が電荷 Ze の原子核の Coulomb potential $V(r) = -\kappa/r$ で散乱する現象である。Newton 力学での粒子の軌道を表す式と微分断面積 $d\sigma$ は、核の電荷を Ze 、 v と J を粒子の速度、角運動量、 $\theta/2$ を散乱角として次式で表せる。

$$r = \frac{J^2/m\kappa}{1 - \varepsilon \sin \phi} \quad \text{ただし,} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m\kappa^2}}, \quad \kappa = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\Omega: \text{立体角})$$


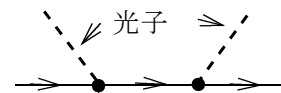
これを Newton 力学的一般相対論の統一場理論へ拡張して考えると、energy 保存則の式は $\phi = \theta/2$ として、荷電粒子のエネルギーの式は次式で表せる。

$$E^2 = m^2c^4 \left[1 - \frac{2}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{e}{m} V(r) + \frac{e}{m} V(r) \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\} \right]$$

これから Coulomb potential による energy の補正を求めることができる。この補正項を含めて微分断面積を計算すると量子電磁気学(QED)の結果と一致する式が得られる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4 \{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)\}}{64\pi^2 \varepsilon_0^2 c^2 |\mathbf{P}|^2 \beta^2 \sin^4} \quad \mathbf{P} = m\mathbf{v}, \beta \equiv v/c$$

v : 速度, c : 光速



(3)コンプトン散乱-クライン・仁科の公式の導出-

コンプトン散乱とは光子が電子に散乱される現象で、右の Feynman 図のように2つの過程がある。統一場理論での光子の入射波と散乱波の4次元線素の式は、それぞれ次式で表せる。

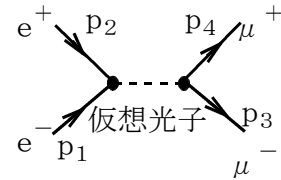
$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}_{\text{入}}}{dt} \right)^2 = c^2, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}_{\text{散}}}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} Cc^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} C^{-1} c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{y}_{\text{散}}}{d\lambda} \right)^2$$

x は入射光の方向で散乱後、y 方向の運動もするとした。ただし、散乱の仕方は 2 つの過程をあわせたものになっている。λ は時間の parameter であり、C は電子が光子のエネルギーを一部吸収する関係からできる係数で、ω_入、ω_散をそれぞれ光子の入射波と散乱波の角振動数として、C=ω_入/ω_散である。これから、散乱断面積を求めれば、QED での計算と同じく次式のクライン・仁科の公式得られる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\omega_{散}}{\omega_{入}} \right)^2 \left\{ \frac{\omega_{散}}{\omega_{入}} + \frac{\omega_{入}}{\omega_{散}} - \sin^2 \theta \right\} \quad (r_e: \text{古典電子半径}, \theta: \text{散乱角})$$

(4) 電子・陽電子散乱 (Bhabha 散乱)

Bhabha 散乱は、高エネルギーの電子(e⁻)と陽電子(e⁺)が互いに衝突して仮想光子に変化する現象である。その後仮想光子(光子の伝播関数)がミューオン(μ⁻)と反ミューオン(μ⁺)に変化する。QED ではこの散乱を仮想光子の放出と吸収で説明しているが、本研究の統一場理論では運動する電子が静止した陽電子と Coulomb 場で相互作用すると考えた。この場合、散乱後は陽電子も運動するので重心系での一体問題で考えれば扱いやすくなる。そこで、Rutherford 散乱の式を重心系に変換したものを流用して、微分散乱断面積を求めると、次式のように QED で計算した Bhabha 散乱の公式と一致する。



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E_{重}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2 c^4}{E_\mu^2}} \left\{ 2 - \left(1 - \frac{m_\mu^2 c^4}{E_\mu^2} \right) \sin^2 \theta_{重} \right\}$$

なお、E_重、θ_重、m_μはそれぞれ重心系の入射粒子の全運動 energy、散乱角及び μ 粒子の質量である。散乱後のミューオンの質量について散乱後のエネルギーを求めると、

$$m_e^2 c^4 = m_e^2 c^4 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - m_e^2 c^2 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - m_e^2 c^2 r^2 \omega^2 - \frac{G}{c^4 r} \frac{\alpha^2 \hbar^2 \omega^2 m_e^2 c^4}{4E_{入}} F(\theta)$$

となる。ここで、α は微細構造定数、m_e は電子の質量、τ は固有時、ω = dθ / dτ、F(θ) は散乱粒子間の potential energy の θ に関係する部分である。ここで、ħω を μ 粒子の散乱 energy と解釈できて、これからミューオンの質量を求めると、電子の約 194 倍になる。実際の値は約 206.7 倍になるので、実測値に比べてやや小さくなる。

(5) 議論

本研究の電子・陽電子散乱計算は、QED で普通に扱われる仮想光子を用いてない。仮想光子は特殊相対論から虚数の質量を持つタキオンの存在を認めなければならない。そのため場の量子論では相互作用の過渡的などころは議論しない。また、QED では相互作用で scalar 場を用いることができない。なぜなら電磁場を量子化すると scalar 光子は負の Hamiltonian になったり、負の確率振幅が現れるためである。そのため QED ではこれを封じ込めている。しかし、古典的に見ると散乱現象は Coulomb 力による現象と解釈されるので、物理的描像として量子電磁気学の考え方と乖離がある。また、QED の計算では δ 関数の 2 乗や δ(0) など数学的に問題のあるものも含まれている。一方、本研究ではそのような数学的な問題がなく同等の結果を得ることができる。このことは量子論の確率解釈や Spin の概念がなくとも素粒子論を議論できる事を示している。