乗法的論理結合子導入の一般化

西牟田　祐樹 (Yuki Nishimuta)

慶應義塾大学

一般化された乗法的論理結合子とは通常の乗法的論理結合子であるテンソル規則($\otimes$)とパー規則($\parr$)の持つ二つの特徴、論理結合子の導入がコンテクストの影響を受けないという特徴と結論に現れる原子論理式はすべて前提にも現れるという特徴、を満たすような導入規則を持つ論理結合子のことである (Danos and Regnier, 1989)。

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ (\otimes\text{-規則}) \quad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}\ (\parr\text{-規則})$$

一般化された乗法的論理結合子$\mathscr{C}$の導入規則は次のような形をしている。

$$\frac{\vdash \Gamma_1, A_{11}, \ldots, A_{1i_1} \quad \cdots \qquad \vdash \Gamma_m, A_{m1}, \ldots, A_{mi_m}}{\vdash \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m, \mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)}$$

一般化された乗法的論理結合子は必ずしも$\otimes$-規則と$\parr$-規則の組み合わせで表現できるとは限らない。$\otimes$-規則と$\parr$-規則の組み合わせで得ることが得ることが出来ない乗法的論理結合子は分解不可能な (non-decomposable)論理結合子と呼ばれる (Danos and Regnier, 1989)。

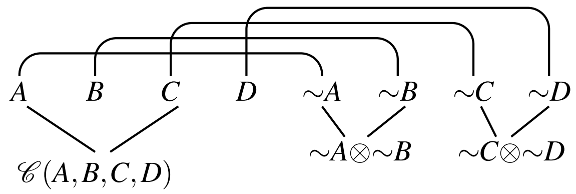
次の二つの導入規則を持つ論理結合子$\mathscr{C}$は分解不可能である。

$$\frac{\vdash \Gamma_1, A, C \qquad \vdash \Gamma_2, B, D}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \mathscr{C}(A, B, C, D)} \quad \frac{\vdash \Gamma_1, A, B \qquad \vdash \Gamma_2, C, D}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \mathscr{C}(A, B, C, D)}$$

線形論理の証明網 (proof-net)の理論では証明とは独立に証明網というグラフが考えられる。特に線形論理の乗法的部分 (MLL)ではスイッチングという概念が定義され、スイッチングの結果得られたグラフが連結と非輪状という条件を満たすとき、MLLの証明図が存在するというシーケント化定理が成り立つ(Girard, 1987), (Danos and Regnier, 1989)。この定理はMLLに一般化された論理結合子を加えた体系で成り立つかという問題に対し、(Danos and Regnier, 1989)による先行研究では成り立たないと考えられていた。しかし、本発表はシーケント化定理が成り立つようなスイッチングの概念が存在するということを示す。このスイッチングは特に分解不可能な乗法的論理結合子に対して、証明に対応する証明網を与え

る。更に複数の同値ではないスイッチングが存在し、それぞれのスイッチングは特定の形の論理結合子の証明可能性を特徴づけるということも示す。

証明と証明網の対応の例



$$\dfrac{\dfrac{\vdash A, {\sim}A \qquad \vdash B, {\sim}B}{\vdash A, B, {\sim}A \otimes {\sim}B} \qquad \dfrac{\vdash C, {\sim}C \qquad \vdash D, {\sim}D}{\vdash C, D, {\sim}C \otimes {\sim}D}}{\vdash \mathscr{C}(A,B,C,D), {\sim}A \otimes {\sim}B, {\sim}C \otimes {\sim}D}$$

References

[1] V. Danos and L. Regnier,1989, *The Structure of multiplicatives*, Archive for Mathematical logic, vol.28, Issue 3, 181-203

[2] J.-Y. Girard,1987, *Linear Logic*, Theoretical Computer Science, vol.5, Issue 1, 1-101