一般相対論的中期量子論と繰り込み理論

徳田雅彦
三重県立津工業高等学校

（１）概要

量子電磁気学は水素原子のラムシフトや電子の異常磁気モーメントの計算は発散の困難を抱えている。しかし、中期量子論に Newton 力学的一般相対論での統一場理論を適用させれば発散することがなく、実験値に近い値が得ることができる。

（２）Newton力学的一般相対性理論

計量 tensor を $g^{ij}=(\delta_{ij}+\phi^{ij})$ と表して、重力場の方程式を

$$\phi^{ij}=\frac{8\pi(1+\delta_{ij})G}{c^4}\left(u^{ij}+\frac{1}{2}r\frac{\partial u^{ij}}{\partial r}\right) \quad ①$$

とすれば、通常の一般相対論での主な解と全く同じ解が得られる。ここで、ϕ は時空に影響を与える potential であり、Gは引力定数、u^{ij} がエネルギー・運動量 tensor の成分である。

（３）中期量子論

水素原子の Schrödinger 方程式は電子の固有関数を $\phi_n(r)$、$\tilde{P}_r$ を運動量演算子、$\tilde{U}(r)$ を potential energy、E_n を energy 固有値とすると、②の左側の式で表せる。energy 固有値は定数なので、右側の式のように固有値の方程式に書き直せるはずである。

$$\left\{\frac{1}{2m}\tilde{P}_r^2+\tilde{U}(r)\right\}\phi_n(r)=E_n\phi_n(r) \quad \rightarrow \quad \left\{\frac{1}{2m}p_n^2+U(r_n)\right\}\phi_n(r)=E_n\phi_n(r) \quad ②$$

p_n と $U(r_n)$ は定数で Bohr モデルの式と一致する。このように量子力学から前期量子論の結果につなぐ方法を「中期量子論」と名付ける。ただし、これは時間依存がない”水素原子のような保存系”に限られる。

（４）統一場理論と一般相対論的中期量子論

②式について、r ＝一定の条件を外して、水素原子についての一般相対論的 Klein - Gordon 方程式に拡張すると、次式を得る。

$$E^2_{n_r n_\phi}\phi_{n_r n_\phi}=m^2c^4\left[\phi_{n_r n_\phi}-\frac{2}{mc^2}\left\{\frac{1}{2m}\left(\tilde{P}^2_{n_\phi}+\tilde{P}^2_{n_r}\right)\phi_{n_r n_\phi}-e\tilde{V}(r)\phi_{n_r n_\phi}\right\}\right] \quad ③$$

ただし、$\phi_{n_r n_\phi}$, $\tilde{P}_{n_\phi}$, $\tilde{P}_{n_r}$, $\tilde{V}(r)$ はそれぞれ偏角方向と動径方向の固有関数、運動量演算子、静電ポテンシャルである。量子数 n_ϕ，n_r は n_ϕ ＝ 1,2,… n_ϕ ＝ 0,1,2, …である。この量子数の組を n， j (n=1,2,…, j=1/2,1,3/2,…)と書き直し、さらに α_f を微細構造定数として固有値の式に直すと、結局、次式が得られる。

$$E_{n,j}\phi_{n,j}(r,\phi)\fallingdotseq mc^2\left\{1-\frac{\alpha_f^2}{2n^2}-\frac{\alpha_f^4}{2n^4}\left(\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{4}\right)\right\}\phi_{n,j}(r,\phi) \quad ④$$

これは Dirac 方程式や spin を加えたゾンマーフェルトの水素模型での水素原子の微細構造の式と一致する。すなわち方位角を無視すれば、電子は概ね楕円軌道上にあると言える。ただし、負 energy は無視した。なお、この計算は高校生でも可能である。

（５）ラムシフト（Lamb shift）

Lamb　shift とは水素原子の $2s_{1/2}$，$2p_{1/2}$軌道のエネルギー準位に差ができる。これを量子電磁気学で計算すると無限大に発散する。これをベーテは半古典論でくり込み計算で実測値に近い値を得た。さらに量子電磁気学で計算を行ったのが朝永やファイマンらで、この成果でノーベル賞を受賞した。しかし、この計算は数学的に問題があり、朝永はあくまで過渡的なものと捉えていた。同様にディラックも批判的であった。つまり量子力学には基本的欠陥が残っている。

これを一般相対論で考えれば、エネルギー準位の差は静電 potential による時空の歪み energy U_{ept}で引き起こされる現象であると考えられる。それに従って計算すると、基本になる式は④式で、Sommer　feld の水素原子模型と一致し、電子は概ね楕円軌道上にあると考えて、歪み energy　U_{ept}を本理論の統一場理論と中期量子論で計算すると、$U_{ept}=\xi 2\pi\varepsilon_0\phi_e/c^2$を得る。なお、$\phi_e$は静電 potential、$\xi$は１ m^3/s^2 である。

これから $2P_{1/2}$軌道のエネルギー準位の補正は、半直弦上(=Bohr 半径 r_B)での静電ポテンシャルの補正と近日点での運動エネルギーの補正を合わせると、ラムシフトの値が 1055.Mz になり、実測値(1057Mz)とほぼ一致する(ε_0：真空の誘電率)。

（６）質量と電荷の補正

量子電磁気学では衣を着た電子を考えるが、衣の値は無限大である。しかし、本理論では衣の値が $\delta e=4.78E-23$［C]，$\delta m=2.72E-34$［kg]と有限値になる。

（７）水素原子の基底状態にある電子の異常磁気モーメント

電子は spin に伴う磁気能率があり、その大きさを Bohr 磁子を単位に $g=2$ で表す。この g の値が外部電磁場を受けて、0.1%ほどずれる。これを異常磁気能率と呼ぶ。

量子電磁気学での計算は数学的に問題のあるくり込み計算で実測値とほぼ一致する

本理論は統一場理論エネルギー固有値の式から、電子が電磁波の衣を着た比電荷 e'/m' が $\dfrac{e'}{m'}=\left(1+3\alpha_f^2\right)\dfrac{e}{m}$ と計算される。また、基底状態での静電 potential による運動エネルギー補正 K_s' を求め、さらに $K=h\nu$ として $h'=h+\delta h$ と Planck 定数の補正を求めると、$\delta h'=\dfrac{3}{2}\alpha_f^2\phi_B h$ を得る。ただし、ϕ_Bを基底状態の静電 potential である。この２式から磁気能率 μ_B' は $\mu_B'=\dfrac{e'\hbar'}{2m'}=(1+2.333E-03)\dfrac{e\hbar}{2m}$ になり、実測値 2.0023193043737 にかなり近い値が得られる。

Planck 定数 h の補正は量子電磁気学の真空偏極に相当すると考えることができる。

（８）まとめ及びマッハ哲学からニュートンの自然哲学へ

Einstein は量子力学の構築は統一場理論の完成が必要と考えたが、上の理論からこれは一定の説得力があることがわかる。しかし、通常の一般相対論では量子化が困難である。ところが、Newton の自然哲学を基礎にした Newton 力学的一般相対論上で構成された中期量子論では発散の困難がなく lamb シフトが簡単に計算できる。

これは Mach 原理の認識論より Newton 観が実用的で優れているからである。ただ、中期量子論は適用範囲が狭く、まだ散乱等に対応してない。これは今後の課題である。