シーケント化が成り立たない乗法的論理結合子について

西牟田　祐樹　(Yuki Nishimuta)

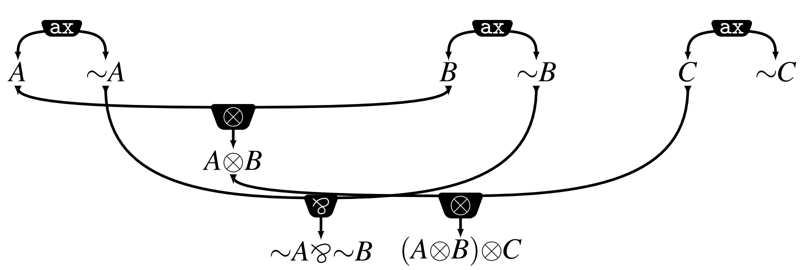
慶應義塾大学

線形論理は構造規則として弱化(weakening)規則と縮約(contraction)規則を持たない論理であり、そのためにそれぞれ二つの「かつ」と「または」の論理結合子を持つ。二種類の論理結合子は乗法的論理結合子と加法的論理結合子と呼ばれる。乗法的論理結合子はコンテクストに対する制約を持たず、推論規則の結論に現れる論理式は全て前提に現れている。

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ \text{乗法的「かつ」} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}\ \text{加法的「かつ」}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \invamp B}\ \text{乗法的「または」} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\ \text{加法的「または」}$$

公理とカット規則の他に乗法的論理結合子のみを含む線形論理の部分体系は線形論理の乗法的部分MLLと呼ばれ、線形論理の乗法的部分では例えば下の図のように証明網と呼ばれる有限グラフに対しシーケント計算での正しい証明図が対応する(Girard, 1987)。このことはシーケント化定理と呼ばれ、このシーケント化定理によって証明網のグラフの形状は命題の意味を説明する。



$$\dfrac{\dfrac{\vdash A, \sim A \qquad \vdash B, \sim B}{\vdash A \otimes B, \sim A, \sim B} \qquad \vdash C, \sim C}{\dfrac{\vdash (A \otimes B) \otimes C, \sim A, \sim B, \sim C}{\vdash (A \otimes B) \otimes C, \sim A \parr \sim B, \sim C}}$$

(Danos and Regnier,1989)は次のように$\otimes$規則と$\parr$規則の複数のステップを一つのステップに潰すことにより新たな乗法的論理結合子$\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$を定義した。

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A, C \qquad \vdash B}{\vdash A \otimes B, C}}{\vdash (A \otimes B) \parr C} \qquad \dfrac{\vdash A, C \qquad \vdash B}{\vdash \mathscr{C}(A, B, C)}$$

Danos and Regnierの論理結合子の構成法は新たな乗法的論理結合子を構成することを可能にし、3項以上の新たな論理結合子を構成するための最も単純な方法を与えてくれる。このような乗法的論理結合子に対しカット除去定理は証明されていたが証明網との対応は研究されて来なかった。

そこで本発表ではDanos and Regnierの論理結合子 $\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$に対し証明網を定義し、MLLを$\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$によって拡張した体系でのシーケント化定理を考察する。論理結合子を函数だと考えれば、乗法的論理結合子 $\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$は函数合成によって得られた函数であり、MLLの $\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$による拡張は意味論的には問題を起こさないと考えることは自然である。しかし証明網による意味論ではこの拡張は問題を起こす。本発表では「MLLにDanos and Regnierの乗法的論理結合子 $\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$を付け加えて拡張した体系でシーケント化定理が成立するのは $\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$が$\otimes$のみから構成されている場合かまたは $\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$が$\parr$のみから構成されている時その時に限る」ということを示す。証明網による意味論では乗法的論理結合子 $\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$の意味を $\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$が$\otimes$または$\parr$のみから構成される場合を除いて説明することができないが、カット除去が命題の意味を説明するという立場では $\mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)$の意味を説明することが出来るということをこの事実は明らかにする。

References

[1] V. Danos and L. Regnier, *The structure of multiplicatives*, Archives for Mathematical Logic vol. 28, 1989, pp. 181-203.

[2] J.-Y. Girard, *Linear Logic*, Theoretical Computer Science, vol. 50, 1987, pp. 1-102.

[3] J.-Y. Girard, *Proof-nets: the parallel syntax for proof-theory*, in Ursini and Agliano (eds.), Logic and Algebra, 1996.