

健全性定理と語用論の関係

北 村 久

北海道大学文学部専門研究員

多くの論理学者は言語使用の側面でメタ定理に制約はないと想定する傾向にある。それに対して、本研究は、メタ定理の例として健全性定理を取ることによって異なった見解を提示する。本研究の目的はその健全性定理の一つのバージョンを具体例でテストすることによってどんな場合にその定理が妥当かという問いを取り扱うことである。これを実行するために、もしいかなる証明も公理と定義を除く内容面に関連しないのであればある無意味な言明が証明可能であるという事実に焦点を当てる。

その事実を検討する。P を和集合の公理とする。Q を外延性の公理とする。そのとき内容面を考えないと「 $Q \vdash P \supset Q$ 」は成り立つと主張する。このことは以下のように示される。第一に、Q を仮定する。第二に、 $P \supset Q$ を得る。第三に、 $Q \vdash P \supset Q$ が帰結する。しかし、内容面を考慮すると、「 $Q \vdash P \supset Q$ 」は成り立たないと主張する。そうするために「 $Q \vdash P \supset Q$ 」が成り立つと仮定する。古典論理に於いて演繹定理とその逆によって命題「 $Q \vdash P \supset Q$ 」は命題「 $\vdash Q \supset (P \supset Q)$ 」に変換することができる。文脈情報として、「Q」は成り立つ。なぜならそれは集合論の範囲内の外延性の公理であるからである。よって、 $\vdash Q$ が成り立つ。そのとき $\vdash Q \supset (P \supset Q)$ と $\vdash Q$ は $\vdash (P \supset Q)$ を与える。ここでその含意命題「 $P \supset Q$ 」はその内容や意味を考慮することによって無意味な言明であると見做していることを思い起こそう。この場合、無意味な命題が証明可能であることが帰結することになる。しかし、どんな無意味な命題も証明可能にならないことを見て取れる。なぜならメタ・レベルの推論に於いてこれは偽であるからである。事実、より形式的に取扱う必要があるものの、もし和集合の公理が成り立てば、そのときには外延性の公理は成り立つ、ということは証明可能であるということは言語直観に於いて無意味ではなく偽である。そのとき「 $\sim(\vdash P \supset Q)$ 」を得る。我々はすでに「 $\vdash P \supset Q$ 」を得ていた。これらは矛盾を産み出す。

対応する意味論上の式「 $Q \models P \supset Q$ 」を検討する。真理付値関数の定義を通常通りのものとする。 φ は古典命題論理の式にわたる変項とする。記号「T」は値「真」である。

(恒真的な含意の定義)

$$\Gamma \models A \Leftrightarrow \forall v (\forall \varphi ((\varphi \in \Gamma) \supset (v(\varphi) = T)) \Rightarrow (v(A) = T)).$$

この定義に於いて Γ と A の代わりにそれぞれ $\{Q\}$ と $P \supset Q$ を据える。後者の値は上の設定によって無意味である。これを値「N」と呼ぶ。健全性定理の例の前件としての「 $Q \vdash P \supset Q$ 」は成り立たなければ健全性定理の例は空虚に成り立つ。「 $Q \vdash P \supset Q$ 」が成り立つ選択肢を考える。そのとき健全性定理の例より「 $Q \models P \supset Q$ 」を得る。上の置き換えを実行すると $\forall v ((Q \in \{Q\}) \Rightarrow v(Q) = T \Rightarrow v(P \supset Q) = T)$ が成り立つ。このとき $\forall v (v(Q) = T \Rightarrow v(P \supset Q) = T)$ を得、かつ、ある特定の真理付値関数 w に対して $w(P \supset Q) = N$ を得る。この特定の w に対

して $w(Q)=T$ であるから $w(P \supset Q)=T$ は成り立つ。しかし、 $w(P \supset Q)=N$ が成り立つことが判明していた。 $T=N$ であるから矛盾を得る。健全性定理は、内容面を考慮しないと上で見たように前件が成り立ち、今見たように後件が矛盾するから、全体として矛盾を生成する。この矛盾を阻止する方法の一つは当該の無意味であるという値は語用論の問題であると見做すことである。

この種の例は健全性定理が適切に働くためにその定理に語用論的な制約を課すことになる。この制約の存在を正当化するために、任意の真な数学の命題間のある含意のいくつかは無意味であるという以外は古典論理と同じ体系を上で使った。焦点となっている健全性定理の少なくとも一つのヴァージョンはその内容や意味を考慮することを要求することを示した。その健全性定理の一つのヴァージョンに於いて二つの選択肢がある。第一の選択肢では、そのヴァージョンはそのままでは妥当でない。第二の選択肢では、それがうまく働くためにはそれは何らかの語用論的取扱いを要求する。後者の場合、論理と語用論の間にインターフェイスを仮定する。このインターフェイスの原理として

(原理)

ある命題がもう一つの命題と結合するとき、これら二つは互いに関連して互いに首尾一貫していなければならない。

という考えを提起する。こうした場合、語用論が論理を展開することを可能にする。

本研究は、証明のターゲットの機械的關係が無意味でないかどうか確かめるために証明内容を考慮しなければならないから、先行する形式主義のプログラムを穏健なヴァージョンに弱めようと試みる。

(穏健な形式主義)

証明をできるだけ機械的なものにするに仮定せよ。そのとき、証明命題の關係が無意味でないかどうか確かめるために証明に現れる公理と定義以外の証明命題の内容を考慮に入れなければならない。しかし、証明の内容や直観や意味が証明のステップ間の關係に入り込むことを排除しようとするために、できるだけ証明をその内容から独立させるようにしなければならない。記号法で命題の内容を区別した上で、いったん公理や定義の集まりを採用したら、命題の個別内容に対して異なった表記法を使うだけでなくそれらの内容や直観に立ち戻る必要がないようにするために証明を機械的に構築しなければならない。

証明のステップの間の任意の關係が無意味でないかどうか確かめるためにそのような任意の關係を取らなければならないことを思い起してほしい。この種のすべての關係を比べなければならないという意味でこのことはグローバルな計算と見做される。このグローバルな計算は効率的でも経済的でもないから疑わしく、採られるべき考えはそれを禁じなければならないということである。代わって、その固定された命題とその直接接近可能な論理的含意のみを考慮に入れば十分であるという意味でのローカルな計算という道具立てを使う必要がある。上で見た語用論の導入と形式主義の修正を避けなければ、命題の演繹を計算するためにローカルな経済性を追求する必要があるわけである。