

Global Logic and Global Set Theory

Satoko Titani

我々が基本とする論理は真と偽という2つの真理値を持つ論理、すなわち2分法 (dichotomy) の論理であり、古典論理の論理体系として定式化されている。

古典論理の体系である G.Gentzen の LK は、

論理演算： \wedge (and), \vee (or), \perp (not), \forall (for all) and \exists (exists)

を用いて記述される。

集合論の命題は、「 u が v の元である」ことを表す式 (formula)

$$u \in v$$

から論理演算を使って構成される式で表される。集合論の定理は集合論の公理から LK の推論規則に従って導かれる。LK と Zermelo-Fraenkel の集合論の公理から構成される集合論を ZFC と表記する。数学は集合論 ZFC の中で記述される。

論理の真理値集合は、「ならば」によって表される順序に関して、**束 (lattice)** の代数構造をもつ。「束」は各部分集合にその上限、下限を対応させる作用素をもつ順序集合である。

$$\leq : \quad \vee (\text{上限}), \wedge (\text{下限})$$

真理値集合が作る代数系を**論理体系のモデル**といい、命題を表す formula φ の真理値を $\llbracket \varphi \rrbracket$ で表す。

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket \leq \llbracket \psi \rrbracket &\stackrel{\text{def}}{\iff} \llbracket \varphi \text{ ならば } \psi \rrbracket = 1 \\ \llbracket \varphi \rrbracket = 1 &\stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi \text{ は真} \end{aligned}$$

真理値の束 (lattice) は最大元 1 (真) と最小元 0 (偽) をもつことから、束の上の関係 \leq を代数演算として表現することができる：

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{basic implication})$$

$$\Box a = \begin{cases} 1 & a = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{globalization})$$

→ または \Box を論理演算として追加した論理体系を **global logic**, 集合論の公理から global logic に従って真命題を導き出す体系を **global set theory** という。

量子集合論

量子力学の世界の論理は、完備オーソモデューラー束を表現する論理であり、**量子論理**と呼ばれる。量子論理は global logic QL_{\Box} として定式化される。量子論理に基づく集合論を **量子集合論 QZFZ** という。

量子集合論 QZFZ は、2分法に基づく集合論 ZFC をメタ理論として、ZFC の universe の中で記述される。一方 globalization \Box を用いることによって量子集合論 QZFZ の universe の中で ZFC の universe を構成することができる。即ち量子集合論 QZFZ では、自身のメタ理論を表現することが可能である。このことによって完全性が証明される。証明のあらすじを述べる。

層表現 Sheaf representation

Orthomodular lattice は、**complete Boolean algebra の層**、即ち位相空間上の Boolean valued function から成る束として表現される。従って量子集合論の universe は、**Boolean valued universe の層**として表現される。即ち、量子集合論では、対象である集合が、メタ理論の立場から見ると、位相空間から Boolean valued universe への関数になる。

終わりに

自然科学の言語である数学は 2分法に基づく集合論の言語で表現されるので、公理が真と決まれば命題の真偽が確定する。一方 2分法に基づく故に、箆で水を掬うように、科学には掬い切れない部分がある。しかし、数学を生んだ人間の智慧は、2分法に停まらず、論理の限界を超えて宇宙を包むのだろう。