中学校数学教育のあるべき姿

A vision for the mathematics education of Junior high school

竹之下保雄　（Yasuo　Takenoshita）

1．この論文は、中学校で行われる数学教育のあるべき姿を示したものである。数学教育とは、「何を、何のために、どのように教えるか」を意味する。そのため、次の事柄が重要と考える。

(1) 中学校での数学の教材は、一般の数学全体の基礎となる学問的な数学理論でなければならない。

(2) 個々の数学理論の意義を理解するため、数学史を通して、その理論が成立した歴史的背景を学ぶ。

(3) 教え方は、生徒の発達段階を考慮し、様々な教具の使用やクイズ・ゲーム等も取り入れる。

2．学問的な数学理論

(1)　1＋1=2 について

人々は、私達の世界は 1＋1=2 が絶対に成り立つと思っている。しかし、例外がある。

①　水 1ℓとアルコール 1ℓを混ぜ合わせると、2ℓより少なくなる。　1ℓ＋1ℓ＜2ℓ

②　粘土１個と粘土１個を合わせたら、粘土１個になる。　１個＋1 個=1 個

③　陽電子１個と陰電子１個を結合させると消滅し、0 個となる。　１個＋1 個=0 個

④　学問的には、Giuseppe Peano(ジュゼッペ・ペアノ)が、1＋1=2 等を次のように理論化した。

0 si legge《zero》，N_0 si legge《numero》，+ si legge《piú》

（0　人は《ゼロ》と読む　，N_0　人は《数》と読む　，＋　人は《プラス》と読む）

1＝０+,　2＝１+,　3＝2+,　…

$a \in N_0 . \supset . a+0 = a$，　$a,b \in N_0 . \supset . a+(b+) = (a+b)+$，　$a \in N_0 . \supset . a+1 = a+$

これらは、1＋1=2 等を前提にして展開した理論で、無条件で 1＋1=2 が成り立つのではない。

(2)「(−1)×(−1)=＋1」について

過去に、この計算に疑問を持った人々がいる。

①　フランスのスタンダール（Vie de Henry Brulard　アンリ・ブリュラールの生涯）より。

もし(−1)×(−1)=＋1 が成り立つならば、どのように考えたら『借金×借金=財産』になるのか。

②　ドイツのライプニッツ G.W.Leibniz.　{Mathematische Schriften 5 (1971)} より。

もし(−1)×(−1)=＋1 が成り立つならば、−１：1=1：−1

左辺は、小さい数：大きい数。右辺は、大きい数：小さい数。このことより不合理となる。

ただしライプニッツは、これを全否定したのではなく、「−１は合理的な感覚によってのみ理解されるのである。」と書いている。

実は彼らの疑問は正しい。これには様々な証明があるが、全て**自然数**と**正の整数**（**絶対値**と**正の数**）が同じであることを前提にしたものであり、無条件で成り立つのではない。

(3)「直線ℓ上にない点Ｐがあり、直線ℓと平行で点Ｐを通る直線は１本しかない。」について

中学校の教科書では、これを証明なしで明白な事柄として書かれている。日常の感覚では成り立つが、数学ではそうではない。空間の曲率が０であれば平行線は１本、正の数であれば平行線は０本、負の数であれば平行線は２本以上となる。したがって、「空間が平らであれば１本引ける。空間が地球上の面のように曲面であれば、平行線を書くことはできない。」と教えるべき。

(4)　点や線などの意味について

数学で使う用語の意味をはっきりと教えるべき。これらは、古代ギリシャのユークリッド（Ευκλείδης、エウクレイデース）の原論（Στοιχεία ストイケイア）で、最初に定義している。

Ὅροι（諸々の定義）

α'　Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.（点は存在する。その部分はどこにもないのであるが）

ドイツ語訳 : Ein Punkt ist,was keine Teile hat.（点が存在する。それは少しも部分を持たないのだが。）

ラテン語訳 : Punctum est,cuius pars nulla est.（点が存在する。その部分はどこにもないのであるが。）

英語訳：A point is that which has no part.（点は部分を持たないものである。）

β'　Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.（また線は、幅無しの線状のものである。）　＊ἐστιν が省略

＊　μῆκος は、linearity（線状のもの）と訳した。

γ'　Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.(また線の諸々の端は諸々の点である。）　＊ἐστιν が省略

３．授業で取り上げるべき数学の歴史

(1)　古代ギリシャの数学

証明の概念が歴史的に初めて登場し、学問としての数学が確立した。

① タレース（θαλής　紀元前 624 年頃 - 紀元前 546 年頃）

② ピュタゴラス（Πυθαγόρας　紀元前 582 年 - 紀元前 496 年）

③ ユークリッド（Εὐκλείδης 紀元前 3 世紀?）

(2)　フランソワ・ビエト（François Viète 1540 年 - 1603 年）

未知量、既知量を記号化し、初めて代数において記号を用いて一般的に推論することを可能にした。

(3)　近世の数学

微積分がニュートン、ライプニッツによって作られた。

① アイザック・ニュートン（Sir Isaac Newton 1643 年 - 1727 年）

② ライプニッツ（G.W.Leibniz 1646 年 - 1716 年）

(4)　ダビッド・ヒルベルト（David Hilbert、1862 年- 1943 年）

数学の考え方には、論理主義、直観主義、形式主義などの立場がある。特に形式主義を主張したダビッド・ヒルベルトの考え方は重要である。

(5)　日本の数学

聖徳太子は、日本の数学の父であること。また江戸時代の和算は高度に発展したが、西洋の数学に全く影響しなかったことなどに触れる。(Florian Cajori ,A history of Mathematics．より）

(6)　現代数学

現代数学の全体像や未解決問題を教える。未解決問題では、ゴールドバッハの予想など、3 年生で学習する素数に関する問題が分かり易い。

4．クイズを用いた指導方法の具体例

問題１　ここに 3 人がいる。A は、「B は正直者である。」と言った。B は「C は嘘つきだ。」と言った。この中で嘘つきは誰か。ただし、A は正直者である。

答　A は正直者なので B も正直者。B が正直者なので C は嘘つき。よって、嘘つきは <u>C</u>

問題２　ここに 3 人がいる。A は、「B は正直者である。」と言った。B は「C は嘘つきだ。」と言った。嘘つきは誰か。ただし、A は嘘つきである。

答　A が嘘つきなので B も嘘つき。B が嘘つきなので C は正直者。よって、嘘つきは <u>A と B</u>

この問題は、前提が異なると答えも異なることを示しており、数学の構造と同じ。数学は、前提は問わない。途中の経過が重要なのである。生徒は、この問題から数学の構造が理解できると思う。