Newton力学的一般相対論

徳田雅彦（Masahiko Tokuda）

三重県立津工業高等学校

（１）概要

通常の一般相対論（以下、通常理論と呼ぶ）は重力による時空の曲がりを数学的に表現するために煩雑な tensor 計算が伴うリーマン幾何学が使われる。この考えの出発点は Einstein の思考エレベータの推論から得た「等価原理」である。

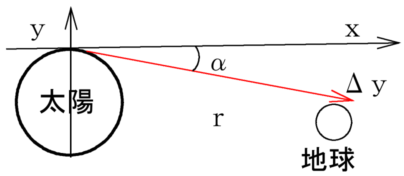
本研究は思考エレベータを「等価原理」と「一般相対性原理」を使って、tensor 計算が伴わない方法で Newton 力学的に検討すれば通常理論と同等の結果を得ることができた。これによって、４次元線素の意味もより簡明になり、電磁場と重力場の統一も容易に議論できるようになった。

（２）光の湾曲とSchwarzschild外部解、水星の近日点移動および運動方程式

一般相対論の検証の第一は太陽重力による光の湾曲が挙げられるが、Einstein は光の湾曲を重力による屈折の式から湾曲の角度0.875秒を導いた。そしてその後、空間の歪みを加えて実際の値である 1.76 秒と訂正した。

この光の湾曲は、Newton 力学でも計算でき光速不変を加えて求めると、

$$y = R - \Delta y \quad , \quad \Delta y \fallingdotseq \frac{GM}{c^2 R} \equiv \frac{r_N}{R} \qquad ①$$



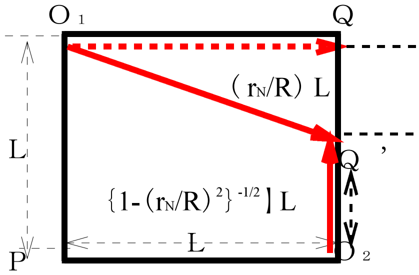
となる。ただし、右図のように太陽の表面を原点とし、ｘ軸上を直進する光線が地球に到達したとき、太陽の重力で－ｙ方向へのずれをΔｙとした。また、Ｒ＝太陽の半径，Ｇ＝万有引力定数，ｃ＝光速，Ｍ＝太陽の質量である。これを用いて湾曲の角度を求めると実際の値の半分になる。これを相対論に拡張する方法は３通りほどあるが、最も直観的には光線の軌跡をほぼ直線と近似し Einstein の思考エレベータに適応させせて考える。すなわち右図のように長さＬの正方形の箱を考え、O_1，O_2から同時に光線を発する。するとこの箱の中では無重力である場合、２つの光線が同時にＱに達する。

光線を発射してからの時間をｔ秒とするとＬ＝ｃｔである。太陽の表面を通過する光線が r_N／Ｒ傾くとして距離Q_2Ｑ’をＬ’と書くと

$$L' = (1 - r_N / R)\,L \qquad ②$$

になる。Ｌ＝ｃｔの関係があるので、Ｌはｔの関数と考えることができる。また、光速不変の原理を考えると、この重力場ではＬ’（ｔ）＝ｃｔが成立するが、もともとＬ（ｔ）＝ｃｔ であったので、空間が縮んだと捉えることになる。ここで、相対論では時間と空間を同等に扱うので、時間ｔも変化してｔ’にする必

重力空間の光線の軌跡



要がある。すなわちL’（ｔ’）を求めることになる。ｔ’の変換も空間と同様に考えれば

L’（ｔ’）≒（1－2 r_N／R）Ｌ（ｔ）　　　　　　③

となる。これはやや近似的な方法であって、厳密には重力場による屈折の式から解くことができ、さらにこの結果を用いて Schwarzschild 外部解が導出できる。ただし、通常理論では微少線素 ds^2 の計量 tensor を共変 tensor で表すが、本論から導かれる微少線素の式は次のように反変 tensor の形式で表される。

$$ds^2=\left(1-\frac{2r_N}{r}\right)^{-1}c^2dt^2-\left(1-\frac{2r_N}{r}\right)dr^2-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2\right) \qquad ④$$

さて、Einstein の思考エレベータから重力による空間の縮みを定義できるので、

$\cosh^2\theta \equiv (1-2r_N/R)^{-1}$　　　　　⑤

と双曲線関数で定義すれば、一般相対論的運動方程式を次式で表すことができる。

$dv/dt=\pm c\,(d/dt)\cosh\theta\sinh\theta$　　　　　⑥

なお、ｖは物体の速さである。この⑥より、仕事と運動エネルギーの関係や力積と運動量の関係式も導出できる。測地線の方程式は必要ない。

一般相対論の検証でもう一つ有名なのは水星の近日点移動であるが、これも③式から求める方法、Newton 力学の計算結果の式を修正する、④式とは別の一般相対論的運動方程式を使って求める、という３つの方法で計算でき、各々実際の値である 43.4 秒が得られる。

（３）重力場の方程式

Einstein の思考エレベータから Schwarzschild 外部解を得ることができるが、内部解など、他の解を求めるのは困難である。そこで、計量 tensor g^{ij} に対して

$g^{ij}=(\delta_{ij}+\phi^{ij})$　　　（δ_{ij} : Kronecker delta）

と表して、重力場の方程式を次のように表すことができる。

$$\phi^{ij}=\frac{8\pi(1+\delta_{ij})G}{c^4}\left(u^{ij}+\frac{1}{2}r\frac{\partial u^{ij}}{\partial r}\right)$$

この式から、内部解や Reissner - Nordstrøm 解、Kotter 解、Vaidya 的な解、Kerr 解など一般相対論の主な解を得ることができる。ただし、ϕ は重力や電磁力などの時空に影響を与える potential であり、ｒは動径方向の距離、u^{ij} はエネルギー・運動量 tensor の成分である。これらの解は全て tensor 計算をほとんど行っていない。

（４）統一場の理論と今後の課題

理論物理学の大きな目標に統一場理論がある。主なものは Weyl の統一場論、Kaluza- Klein の５次元統一場理論、内山 gauge 理論、Yang-Mills 理論があり、５次元統一場以外は gauge 理論が基本である。これは時空に potential を埋め込むようなイメージである。内山氏は「計量 tensor から離れるべきだ」という趣旨を述べている。しかし、本研究はむしろ計量 tensor に注目し、５次元場を４次元場に書き直す為に Weyl 場的な考えを取り入れる手法で、静的な静電場と重力場を統一させることができた。その上で、Kerr - Newman 解の手法を使って静磁場を統一させ、さらに周期的に変動する電磁場を統一することができた。しかし、電磁波を考える場合、量子場を導入する必要がある。これについては今後の課題で現在検討中である。