

公開告知論理の式計算について

野村尚新 佐野勝彦
北陸先端科学技術大学院大学

公開告知論理 (Public Announcement Logic: PAL) は, Plaza [4] によって提唱された人間の認識の変化の形式的表現を目的とする認識論理のひとつである. 具体的には, われわれがある情報を他者の告知など外部から得た場合, われわれの認識状態は変化する可能性がある. 例えば, 「ジョンは明日雨が降るか降らないか分からない」状況 (この文が真なる状況) において, 天気予報で「明日雨が降る」と言っているのを彼が聞いたとする. このとき彼の認識状態は変化して「ジョンは明日雨が降ることを知っている」が真となる. 認識論理はクリプキモデルで認識状態を表現するが, 通常のそれは認識状態の変化を表現するシンタクスを持っていない. PALはこの人間の認識の流動性, 柔軟性を表現するために導入されたものであり, PALを基礎に発展している動的認識論理 (Dynamic Epistemic Logic) は, 論理パズルの形式化を介した人工知能研究, 形式認識論, 法の形式化などへの様々な応用可能性を持つ.

PALの証明体系はヒルベルト式の公理系 (これを **HPAL** と呼ぶ) で Plaza [4] により与えられており, これは PAL のクリプキ意味論に対して完全であることが示されている. だが, その一方で一般にヒルベルト式公理系は体系内定理の証明に用いるには扱いが難しく, われわれ人間にとっても計算機にとってもより扱いやすい体系が望まれる. そのような証明体系の候補のひとつが論理式のふたつのリストからなる式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を証明図の基本単位として用いるゲンツェン式の式計算 (Sequent calculus) である. だが, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ はどのように読まれるべきであろうか. これに対する解釈は少なくともふたつ考えられる.

解釈 1 もし Γ における全ての論理式が成り立つのであれば, Δ におけるある論理式が成り立つ,

解釈 2 Γ における全ての論理式が成り立ち, かつ, Δ における全て論理式が成り立たない, ということはない.

これらの解釈は一般に同値であると思われるかもしれないが, 実はこれほどのような論理を想定しているかに依る. 例えば, 古典命題論理において, 真理値割り当てに相対化して「成り立つ」を理解すればふたつの解釈は同値である. だが, PAL においてはそうではなくこの区別は PAL の健全性定理の証明で決定的に重要になる.

様相論理に対する式計算で幅広く浸透しているもののひとつが Negri [3] のラベル付き式計算である. この計算体系は, これの名称にみられるようにクリプキ意味論における可能世界の集合の要素に対応する「ラベル」を各論理式に付した「ラベル付き論理式」を用いて計算を行う. 本発表で扱う証明体系は, このラベル付き式計算を PAL 用にアレンジしたものである. PAL のラベル付き式計算は, 既に Maffezioli and Negri [2] によって提

案されたものがあるが (**G3PAL** と呼ばれる), しかし, Balbiani 等 [1] によって指摘されているように **G3PAL** には欠陥が存在する. 本発表では, Balbiani 等が指摘した点とは異なる **G3PAL** における問題点に言及する. 要約すると, **G3PAL** はクリプキ意味論の到達可能性に対応する推論規則を持たず, それゆえ完全性が既に示されている **HPAL** における公理で証明できないものが存在するのである. 従って, われわれは **G3PAL** の問題点を明らかにして, これを修正した体系を提案する. この計算体系を **GPAL** と呼び, また, カット規則を含む体系を **GPAL**⁺ と呼ぶ.

加えて, 本発表では特に健全性定理に注意を払う. なぜなら, 解釈 1 に従って PAL のラベル付き式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の妥当性 (validity) を定義すると健全性定理の証明ができない. しかし, 解釈 2 に従ってこれの妥当性 (validity) を定義すると健全性定理が証明できる. 従って, PAL において解釈 1 と 2 は同値ではないのである.

本発表で示されるのは, まとめると以下の定理である.

定理 次の 4 つは同値である: PAL の論理式 A に対して,

- (i) A は全てのクリプキモデルで妥当である, (ii) A は **HPAL** で証明可能である,
- (iii) A は **GPAL**⁺ で証明可能である, そして, (iv) A は **GPAL** で証明可能である.

参考文献

- [1] P. Balbiani, V. Demange, and D. Galmiche. A sequent calculus with labels for PAL. *Presented in Advances in Modal Logic*, 2014.
- [2] P. Maffezioli and S. Negri. A Gentzen-style analysis of Public Announcement Logic. *Proceedings of the International Workshop on Logic and Philosophy of Knowledge, Communication and Action.*, pages 293–313, 2010.
- [3] S. Negri. Proof analysis in modal logic. *Journal of Philosophical Logic*, 34:507–544, 2005.
- [4] J. Plaza. Logic of public communications. *Proceedings of the 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems: Poster Session Program*, pages 201–216, 1989.