素朴集合論は？

―カントール集合論の曖昧性・瑕疵・改良と西洋知的文明の偏り―

浅井　博（Hiroshi Asai）
早大理工学総合研究センター・欧州バイオメディカルサイエンス研究所

（はじめに）

カントールの集合論は、２種類の集合数の提案で始まる。すなわち、順序数（first, second, third,・,・,・）と基数（one, two, three,・,・,・）である。順序数を用いると、偶数も奇数も有理数も、さらに２の冪乗数なども自然数と同じになる。可付番無限大まで１対１の対応で数え尽くすからである。可付番無限大まで数えた順序数のことを超限順序数という。可付番無限大の元の個数のことを超限基数という。

線分長１までの長さは、実数で表されるが可付番無限大よりも個数が大きいことがカントールによって証明された。いわゆる、対角線論法である。さらに、長さ１の正方形の面積上の点の個数は、線分上の点の個数と同じ濃度（Cardinality）になることも証明された。これを Aleph 1＝ ２＾Aleph 0 と書くことになっている。さらに、Aleph 2＝ ２＾Aleph 1 = ２＾２＾Aleph 0 に違いないとカントールは考えた。Aleph 0 のことを、以後簡単に、ωと記すことにする。超限順序数になりうる順序数であるからである。

（実数とは何か？）

Web-site でべき乗集合の項を見ると、２つの集合ＡとＢとがあって,ＡのＢべき乗は、A^B である。A=（0,1）で B＝ωならば、線分長１の上の点の個数の表現と同じである。A=（1,2）で B＝ωとしても同じ結果である。しかし、線分長１の上の点の個数とは無縁の集合となる。一方、Ａ を（0,1,2,3）と採ると、前者等とは異なる集合になる。元の総個数が２乗になるからである。一方、線分長１の上の点の個数は、２進法で表現すると、A＝（0,1）となり、４進法で表現すると、A＝（0,1,2,3）となる。この場合には、進法という単なる表現法の違いであって、線分長１の上の点の個数を表わしていることに違いはない。

カントールの素朴集合論によると、実数の集合は２＾ω と表現されるが、この２は唯べき乗の底という意味であるらしい。本研究の発表者は、曖昧なただのべき乗の底という意味ではなくて、実数表現の底は２でも３でも４でも１０でも良いと判断する。ただし、４＾ω を考えた場合、４＾ω と（２＾ω）＾２とは意味が異なると解釈したい。何故ならば、前者は４進法の実数表現で線分長１の上の点の個数のことであるが、後者は２進法表現の長さ１の正方形の面上の点の個数のことであるからである。勿論、カントールが証明したように、どちらの濃度（Cardinality）も同じであることに留意する。言い換えれば、実数は唯の非可付番集合という顔と、起点から数えた長さを持つ量とい

う顔である。１対１の対応という原理だけを採用すると、どちらの顔を採用しているかの判断が曖昧になってしまう。このことは、バナッハ＝タルスキーの定理（パラドックス）を考える上で重要になってくると考えたい。

確かに限りなく短い線分上の任意の点と限りなく長い線上のある点とは、１対１の対応が成立するので、濃度だけを考えれば長さの概念は必要としない。しかし、同じことが可付番無限大集合の場合にも成り立つ。 そこで、著者は、実数は長さの次元を持つという考えを優先したい。さらに、べき乗の底は、新しい第３の集合数と考え、$_{0}2$ とか$_{0}3$とか$_{0}4$とか記す。可付番無限大進数の場合には、$_{0}\omega$である。そして、任意の集合の元の個数をωと$_{0}\omega$をパラメーターとする関数として表す。ここで問題になるのは、実数の濃度は、べき乗の底としての進数とは独立の量であるから濃度（Cardinality）をどう定めるかである。

さらに、ωの有限回ωべき乗は、ωと同じ濃度であるが、ωの可付番無限大回のωべき乗は、実数集合の１ランク上の集合になる筈である。すなわち、Aleph 2 である。その意味で、「ゲーデルの世界」という本の記述は一部分間違っている[１]。正しくは、ωべき乗のある段階で$_{0}2$または$_{0}\omega$が入っているべきである。そして、その間に括弧も入れるべきである。その意味でもカントールの２＾２＾ωは、２＾（２＾ω）であって、（２＾２）＾ωではないと云える。後者の濃度は実数集合の濃度と同じになってしまうからである。

（ギリシャ文明以来の位置付け）

古代ギリシャ以来良く伝えられていることだが、ゼノンのパラドックスというのがある。「アキレスと亀の競歩」である。亀が前方に歩んでいて、アキレスが追い付こうとするのだが、決して追い付けないというパラドックスである[２]。そこで、自分流に詳しく論じてみよう。実は、二通りの場合がありうる。亀の歩みがアキレスの歩みよりも速い場合と遅い場合である。亀の方の歩みが速ければ、追い付けないのは当然であるから、議論そのものがナンセンスである。だから議論のためには、アキレスの歩み方がより速いという概念がまず必須である。ゼノンが始めた議論は、速度の概念を無視して、亀がもと居た地点にゼノンが追い付くと、亀は先に進んでしまっていて、何回追い付く動作を繰り返しても永遠に追い付けないというものである。実際はあるのに、速度や時間の概念がなければ、議論に矛盾はないということである。

似た問題は、「バナッハ＝タリスキーの定理」にも言える[２]。実数に長さの単位が無いとすれば、この定理には矛盾が無い。しかし、限りなく短くても長さの概念がある線分上の点の起点からの線の長さ（面とか体積の概念も含む）は、次元・単位を持つと考えるのが妥当だと著者自身は認めたい。そうすると、「バナッハ＝タリスキーの定理」は「バナッハ＝タリスキーのパラドックス」と格下げになることが期待される。

（文献）［１］廣瀬健・横田一正著「ゲーデルの世界」海鳴社、pp.34.
［２］林晋編著「パラドックス」日本評論社