ラベル付き様相式計算とその拡張

山﨑紗紀子 (Sakiko Yamasaki)

首都大学東京

本発表では，Dyckhoff と Negri [1] での，G3-style のラベル付き式計算 (Labelled sequent calculi) [2] を用いた，直観主義論理と S4 との間の埋め込み定理の構成的な証明が，Albert Visser による部分直観主義論理 BPL [3] と K4 との間の埋め込み定理へと拡張可能であることを明らかにする．

ラベル付き式計算は，様相論理のシークエント計算を与える試みの一つとして発展してきた．この体系では，クリプキモデルの強制条件 $x \Vdash A$ が，構文論の一部として組み込まれており，到達可能性関係 R が推論規則の中に明示的に出現する．例えば，$\Box$ の強制条件

$$x \Vdash \Box A \quad \text{iff} \quad \text{全ての } y \text{ に対して，} xRy \text{ ならば } y \Vdash A$$

に対し，$L\Box$ は左辺から右辺を，$R\Box$ は右辺から左辺を，それぞれ表現している．

$$\frac{y{:}A, x{:}\Box A, xRy, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x{:}\Box A, xRy, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ {\scriptstyle L\Box} \qquad\qquad \frac{xRy, \Gamma \Rightarrow \Delta, y{:}A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x{:}\Box A}\ {\scriptstyle R\Box}$$

強制条件を構文論内に組み込む同様の手法を用いて，直観主義論理のラベル付き式計算の体系も与えることができる [1].

Dyckhoff と Negri は，このラベル付き式計算を用いて，以下のゲーデル翻訳

$$\begin{aligned} P^{\Box} &:= \Box P \\ \bot^{\Box} &:= \bot \\ (A \supset B)^{\Box} &:= \Box(A^{\Box} \supset B^{\Box}) \\ (A \& B)^{\Box} &:= A^{\Box} \& B^{\Box} \\ (A \vee B)^{\Box} &:= A^{\Box} \vee B^{\Box} \end{aligned}$$

の下で成り立つ，ゲーデル・マッキンゼイ・タルスキの定理 [4, 5]

$$\text{Int} \vdash \Gamma \Rightarrow A \quad \text{iff} \quad \text{S4} \vdash \ \Gamma^{\Box} \Rightarrow \ A^{\Box}$$

に構成的な証明を与えているが，彼らの議論は到達可能性関係の反射性の仮定に依存している．本発表では，この依存を取り除き，BPL のラベル付き式計算の体系を新たに与え，彼らの結果を G3B (BPL のラベル付き式計算の体系) と G3K4 (K4 のラベル付き式計算の体系 [2]) との間の埋め込み定理へと拡張する．その際，先の翻訳

を原子式についてのみ，$P^{\Box} := \Box P$ から $P^{\Box} := \Box P \& P$ へと修正 (この翻訳はすでに [3] に見い出せる) したものを用いる．修正した翻訳を用いることで，彼らの結果を拡張した以下の定理の構成的な証明を与えることができる．

Theorem 1. G3B $\vdash \Gamma \Rightarrow A$ iff G3K4 $\vdash\ \Gamma^{\Box} \Rightarrow\ A^{\Box}$.

そのため，まず以下の補題を示す．

Lemma 1. G3K4 $\vdash \Gamma^{\Box}, \Gamma', \Box\Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta^{\Box}$ なら，G3B $\vdash \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta$. 但し，$\Gamma$ と Δ は BPL のラベルが付いた式の multiset，Γ' と Δ' はラベル付き原子式の multiset，$\Box\Gamma'$ は Γ' に含まれる原子式に $\Box$ をつけたものからなる multiset である．

この補題の Γ', Δ' を空と考えれば，Theorem 1 を簡単に示すことができる．本発表では，まず BPL のラベル付き式計算の体系 G3B について説明し，BPL と K4 との間の埋め込み定理の構成的な証明を与える．また，最後に，本研究の今後の展望についても簡単に触れたい．

本研究は北陸先端科学技術大学院大学の佐野勝彦氏との共同研究の成果である．

参考文献

[1] R. Dyckhoff and S. Negri. Proof analysis in intermediate logics, *Archive for Mathematical Logic*, Vol. 51, pp. 71-92, 2012.

[2] S. Negri. Proof analysis in modal logic, *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 34, pp. 507-544, 2005.

[3] A. Visser, A propositional logic with explicit fixed points, *Studia Logica*, Vol. 40, pp. 155-175, 1981.

[4] K. Gödel. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus, trans. by J. Dawson. In S. Feferman et al. (eds.), *Kurt Gödel Collected Works, Vol. 1: Publications 1929-1936*. Oxford University Press, Oxford. pp. 300-303, 1986. Originally published as "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls". *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Vol. 4, pp. 39-40, 1933.

[5] J. C. C. Mckinsey and A. Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 13, pp. 1-15, 1948.