知的な遊びとしてのＮクイーン拡張問題（その１）

浅井　博

（早稲田大学理工学総合研究所）

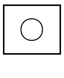
（要旨）

Ｎは４から始まるが、８クイーン問題で世に知られるようになった。ガウスは、計算結果を 92 通りなのに、86 通りと間違えてしまったので有名になった問題である。チェスのクイーンをＮｘＮの桝に互いにチェックし合わないように、配置するには、幾通りの配置があるかという問題である。配置の場合の数をＮの関数とすると、$Q(N)$となる。配置は、９０度回転で対象的なものと、１８０度回転で対照的なものと、対称的でないものの３種類ある[1)]。従って、$Q(N)=2\{Q_{2}(N)+Q_{1}(N)+Q_{0}(N)\}$である。右辺の２は、すべての解が鏡面対称性をもつからである。９０度回転で対象的な$Q_{0}(N)$は、Ｎ＝４ｍ、または４ｍ＋１のときにのみ解をもつことが知れている。ただし、例外的にｍ＝２のときには解がない。$Q_{0}(N)$のときには、四角い桝の中心を平面座標の原点と考えるのが便利である。

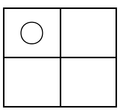
1)　$Q_{0}(N)$の解は、第１象限の左上の三角形の部分だけで、クイーン配置を考えれば良い。その配置のクイーンの一個、または、複数個を第４象限の右上部分に配置換えしたものも解になるからである。即ち、$Q_{2}(N)=A(N)2^{N}$となることがわかった。しかし、このことは、著者の発見の前に中国の数学者が中国語論文ですでに発表していることが後でわかった。そこで、すぐ考え付いたことは、第１象限左上の直角点から降ろした斜線に対して、鏡面対象な解があるものと、解が無いものとの２種類あることを発見した。したがって、(鏡面対象な解の場合数）／$A(N)$がどんな値をとるかが興味ある問題である。さらに、Ｎが無限大になったときの上の比がどんな値に収束するか？である。新しい超越数になるかもしれない。

2)　$Q(N)$の値は、Ｎ＝４から始まって、Ｎ＝３２までコンピューター計算されて発表されている。そこで、著者は、その概数をＮの関数として計算してみた。約１％の誤差の範囲内で概数が分かったので発表する。これは丁度、Ｎ！の概数をＮの関数として式で表すようなことである。クイーン配置は、ＮｘＮ桝において、左上の１行目から順序良くクイーンを必ず配置することにする。Ｊ 行目までで配置が終わると、それに番号を付けることにする。i=1，2，3,・・・・，ｗである。与えられた N において、J 行目まででクイーン配置が終わる場合の数を$P_{n}(J)$と置く。$P_{n}(J)=Q(N)$である。N個のクイーンの配置に成功するのは滅多に無い。成功する N クイーン配置の順序はアット・ランダムであろうか？

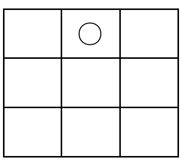
［１］



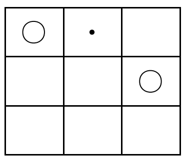
［２］



$[3]_{1}=\{1,\ ,2\}$

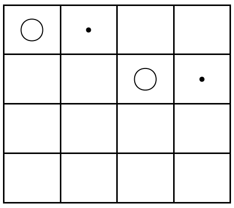
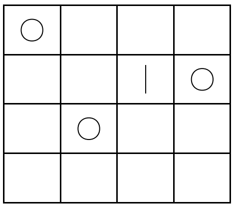
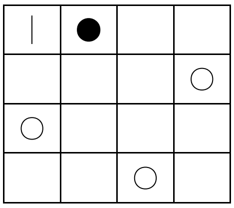


$[3]_{2}=\{\ ,1,\ \}$、

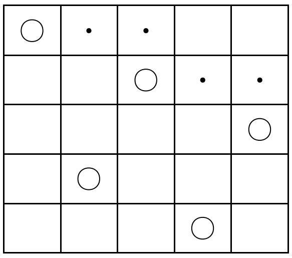
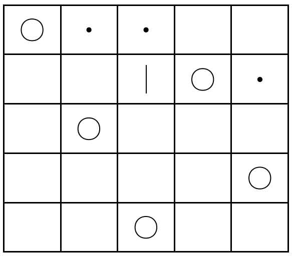
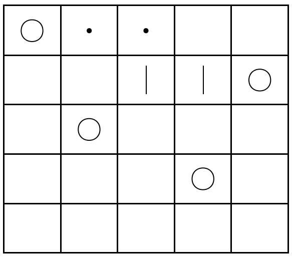


$[3]=2$

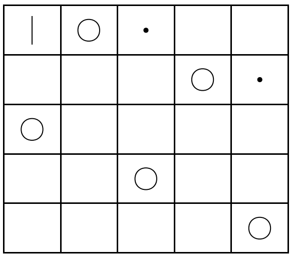
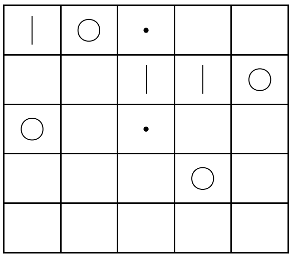
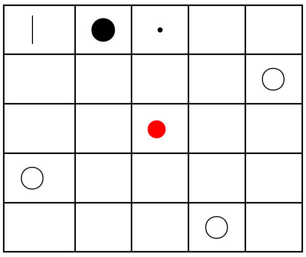
$[4]_1$＝｛1，，2，｝　$[4]_1$＝｛1，3，，2｝　$[4]_1$＝｛3，1，4，2｝

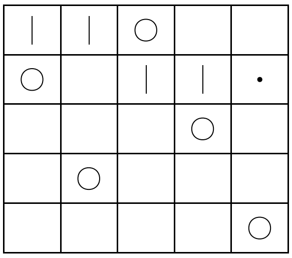
$[5]_1$＝｛1，4，2，5，3｝　$[5]_2$＝｛1，3，5，2，4｝　$[5]_3$＝｛1，3，，4，2｝

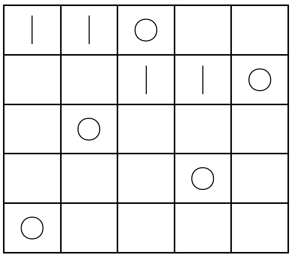
$[5]_4$＝｛3，1，4，2，5｝　$[5]_5$＝｛3，1，，4，2｝　$[5]_6$＝｛4，1，3，5，2｝

$[5]_7$＝｛3，1，，4，2｝　$[5]_8$＝｛3，1，，4，2｝　[5]　＝　8



左右
双子



上の桝において、$[5]_1$と$[5]_2$は互いに隣り合っている６クイーンが完成している。
これを双子疑似素数とよぶことにする。真の双子素数と似て、N無限大で無限大個ある可能性が高い。与えられたNにおいて、疑似素数の配置の間隔はアット・ランダムのようにみえるが、双子疑似素数が現れる確率は、真の双子素数の場合よりも頻繁なように見える。この理由は何故だろうか？ Nクイーン問題の特性のように見える。ある桝位置におけるクイーンの出現は、より上のクイーンの配置に依存するので、マルコフ鎖のようにみえる。

3) 順序立ててNクイーン配置の成立をさがすと、Nが偶数と基数とでやや異なる最初のクイーン配置があるらしいことを発見したので報告する。

（文献）; 数学セミナー増刊 ; 数学 100 の問題、山本幸一著の８個のクイーン郵の問題 p44.