中学校数学教育の諸問題

竹之下保雄（Yasuo　Takenoshita）

1　この論文は、中学校で学ぶ数学を学問的な視点で検討したものである。人々の数学観は、中学校時代での学習に影響されると思われる。したがって、この数学は重要である。しかし、その内容にはいくつかの問題がある。その指摘と改善を提示すのが、本論文の目的である。

2　代数の分野

⑴ 正負の数の計算

絶対値=正数（1=+1）を前提とした説明が必要

2×3=6 より (+2)×(+3)=+6　ここから　(+2)×(−3)=−6,　(−2)×(−3)=+6

1+1=2 より (+1)+(+1)=+2　　ここから　(+1)+0=+1,　(+1)+(−1)=0,　(+1)+(−2)=−1

(+1)+(−1)=0,　0+(−1)=−1,　(−1)+(−1)=−2

⑵ 数例から一般式へ、証明なしで拡張

『(−2)×(+5)=(+5)×(−2)=−10 より乗法の交換法則が成立』等

数学的帰納法で証明できるとの説明が必要

⑶ 分数の除法を乗法になおす計算

$5\div 2/3=5/\frac{2}{3}=(5\times 3)/\frac{2}{3}\times 3=(5\times 3)/2=5\times 3/2$

連分数を使っての証明が必要

⑷『問 $\sqrt{2}$ の小数部分を求めよ。答 $\sqrt{2}-1$』

最初の $\sqrt{2}$ を使っての解答は循環論法

⑸ $\sqrt{2}$ の無理数である証明(教科書に記載)は不十分

『$1<\sqrt{2}<2$ より $\sqrt{2}=a/b$（a/b は既約分数）とする。$(\sqrt{2})^2=(a/b)^2$　　$2=a^2/b^2$

左辺は整数。右辺は約分ができないので分数。よって $\sqrt{2}$ は無理数』

a/b が既約分数でも a^2/b^2 が既約分数になる保証はない。素因数分解の一意性の証明も同時に必要

3　関数の分野

⑴ 一次関数 y=ax＋b で、変化の割合が a になる一般式での説明がない

⑵ y=ax+b のグラフは連続な直線だが、その連続は数学の前提であることを明記すべき

4　図形の分野

⑴『角錐の体積は、角柱の体積の 1/3』について、実験での授業の問題点

ア：実験では、近似値が出せるだけ。

イ：実験では、1 つの場合が示せるだけで一般的に拡張はできない。

⑵ 球の表面積の求め方

『円柱に内接する球の表面積と円柱の側面積が等しい』より $4\pi r^2$ を導く。しかし、等しくなる理由の説明がない。積分で証明が可能との話が必要

(3)　作図について

幾何学的作図法（円と直線のみでの作図）と機械的作図法（道具を使っての作図）の違いの説明が必要。学校での作図は、前者を意味する。しかし教科書には、２つの三角定規を使っての平行線の作図(機械的作図) も記載されており誤解を招く。

(4)　図形の論証について

ユークリッド（Ευκλείδης）の原論（Στοιχεία）では、前提（定義、公理、公準）を明確にし、論証している。しかし中学校では、前提が明確ではない。次のことを前提にすべき。

(ア)　直線上に点があり、この点の平角は 180°

(イ)　平行線の同位角は等しい

(ウ)　同位角が等しければ二直線は平行

これから、『対頂角は等しい』『平行線の錯角は等しい』『三角形の内角の和は 180°』等の論証が可能。

(5) 三角形の合同条件を前提にした論証から生じる矛盾

『△ABC で AB＝AC のとき∠B=∠C』の証明の場合

(ア)『頂角 A の二等分線を引く。底辺 BC との交点を D とする。△ABD と△ACD は、二組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、△ABD≡△ACD　よって∠B=∠C』

最初に、∠A の二等分線が引けることを証明しなければならないので、不完全な証明。

(イ)『底辺 BC の中点と A を線で結ぶ。△ABD と△ACD は、三組の辺がそれぞれ等しい①ので、△ABD≡△ACD　よって∠B=∠C』

これは、①が『二等辺三角形の底角は等しい』を使って証明するので循環論法になる。

5　数学的に正しいとは

中学校では『数学的な考え方』が重視されている。しかし我々が問題を解くとき、ある決まった思考方法で解くのではない。既習の事項を参考にしながら、様々な角度から検討して解く。そして、答えの出し方が数学的に正しいかどうかのみが議論の対象になる。よって、この思考方法は評価の対象にはならない。

では数学的に正しいとは何を意味するのか。Hilbert の形式主義(formalism)によれば、『数学は、前提は何でもよい。その途中の式に矛盾がなければ正しい。』ということになる。授業では、これを正負の数や図形の論証のところで説明できる。

6　授業で話すべき事項

・計算の原理を示した**ペアノの公理 (Peano axioms)**

・図形の論証を示した**ユークリッド原論**

・数学の一つの限界を示した**ゲーデルの不完全性定理**

（Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme　Ⅰ）

（Principia mathematica や類似した諸々の体系の形式的に未決定な諸々の命題についてⅠ）

・ギリシャ数学を出発点とした数学史の概略

この結果、人々は正しい数学のイメージを持つことができるであろう。