

特殊相対性理論とパウリ行列

新村公剛 (Kimitake Shinmura)

新村公剛公認会計士事務所

この論文では、特殊相対性理論のローレンツ変換式及び世界線の式がパウリ行列で表示され、さらに、パウリ行列に準じた行列について指摘するものである。まず、パウリ行列は、

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} & \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1}$$

で表わされる。次に、ローレンツ変換式を導く(注)。座標系Kと座標系K'のいずれも慣性系でKの原点Oに対するK'の原点O'の速度をvとする。質点が動いていて、Kでは時刻tに座標xにあり、K'ではそのときが時刻t'で座標x'であるとする。さらに、話を簡単にするために、x軸とx'軸は一直線上にあって、正の向きは同じとする。そして、vの方向・向きがx軸方向でx軸の正の向きと一致していて、この速度のx成分をvと表す、こうすると、原点O'はx軸上を移動することになるので、ある一瞬には原点Oと重なることになるが、このとき、t=0, t'=0と時計を合わすことにする。力が作用していない質点が等速直線運動をしているとき、この運動は、慣性系Kでも慣性系K'でも等速直線運動になる。したがって、x', t'とx, tの間には、行列の形で、以下のように、一次変換の関係が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}\tag{2}$$

$v = \frac{x}{t}$ 及びc=光速度などを使って、(2)式のa, b, c及びdを求めて、 $\beta = \frac{v}{c}$ 、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ を使って、このローレンツ変換式を行列の形で表すと、

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma c \beta \\ -\gamma \beta / c & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

さらに、右辺を変形すると、

$$= \gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} 0 & c \\ c^{-1} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

(3)

$s = \begin{bmatrix} 0 & c \\ c^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ で表わすと、パウリ行列と同様、 s^2 は(1)式の第1

式の単位行列 σ_0 になるから、(3)式から

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \gamma (s^2 - \beta s) \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

を得る。

(4)

上記の(4)式の t' を $c t'$ に、 t を $c t$ に置きかえると、(4)式の s の代わりに(1)式のパウリ行列 σ_1 で、(4)式の t' を $i c t'$ に、 t を $i c t$ に置きかえると、(4)式の s の代わりに(1)式のパウリ行列 σ_2 で、世界線は、(1)式のパウリ行列 σ_3 で表わされる。上記の s の行列は、次式のように、エネルギー E 及び運動量 P_x のローレンツ変換式(注)にも表れる。

$$\begin{bmatrix} E' \\ P_x' \end{bmatrix} = \gamma (s^2 - \beta s) \begin{bmatrix} E \\ P_x \end{bmatrix}$$

を得る。

(5)

以上

(注) 時間と空間の物理学—相対性理論入門—恒岡美和著 聖文社 1991年4月1日初版第2刷発行 P. 21以下及びP. 83以下