

量子論理における含意の問題

横尾剛 (Tsuyoshi Yokoo)

慶應義塾大学

本発表では、量子論理 (Birkhoff-von Neumann (1936), Kalmbach (1983)) における含意の問題に関して、有限個の \vee と \wedge と \perp からなる多項式で表され、可換な元に関しては古典論理の含意に帰着するという局所的にブールの (LB, Locally Boolean) と呼ばれる基準を満たす 6 通りの含意 ((0) the maximum implication, (1) Kalmbach, (2) non-tollens, (3) the Sasaki arrow, (4) the contrapositive Sasaki arrow, (5) the minimum implication) (Kotas (1967)) を、96 個の元からなる F_2 と呼ばれる束のハッセ図上で表現し、01 から 96 までの Beran 数 (Beran (1985)) と呼ばれる番号によって番号付けをすることで、6 通りの含意のそれぞれが、1 つにつき 16 個の元からなる 6 つの各ブール代数の 14 番目 (14, 30, 46, 62, 78, 94) に位置しており、16 個ずつ離れているというパターンをもつことをみた上で、さらに、対偶による特徴付けが行われる。(0) と (5) は対偶をとると自分自身に戻るという特徴をもっている一方で、それらに挟まれた残りの (1), (2), (3), (4) については、(1) と (2), および、(3) と (4) のそれぞれが、相互に対偶によって結ばれていることをみる。

従来、量子論理の含意についての研究 (Hardegree (1981)) では、(3) the Sasaki arrow を事実上の標準として採用するというアプローチが多数派としてとられてきており、6 通りの多項式的な含意の中からどのようにして (3) the Sasaki arrow が選ばれるのかということに関して、例えば、直観主義論理における含意の定義の仕方に類似した方法に、さらに可換性を要請するという仕方で拡張するという論証 (大出 (1979)) などが知られていたが、本発表では、可換性を要請する部分を増やすことで、類似の論証から (5) the minimum implication を選び出すことも可能であることが述べられる。このことは、(3) the Sasaki arrow に限定されてきた含意の問題の研究の範囲を再び他の多項式的含意にまで拡大することを動機付けている。

さらに、量子集合論 (Takeuti (1981)) の研究において、(3) the Sasaki arrow の選択のもとで示されていた ZFC 移行原理の成立という根源的な性質 (Ozawa (2007)) が、(0) から (5) の 6 通りの含意を一般化した一般化含意 (generalized implication) に対しても確立された (Ozawa (2009)) ことから、6 通りの含意を個別に扱い比較するだけでなく、一般化含意がもつ性質をさらに明らかにしていくという研究が動機付けられることが述べられる。このことは、量子論理において 6 つの異なる含意が存在するというのではなく、含意はあくまでも 1 つだけ存在し、それが 6 通りの多項式で現れているのだという認識を正当化している。

また、量子論理における含意を多項式的に定義されるものに限定することはあくまでも作業仮説であり、必ずしも多項式的に定義されるものに限定されるものに限らないということから、多項式的に定義可能ではない非多項式的な含意の研究が動機付けら

れている。

量子論理に基づく集合論である量子集合論の研究は、「存在するとはどういうことなのか」、「実在するとはどういうことなのか」、そして、「何が存在するのか」、「何が実在するのか」という存在論の最上位の原理的な問題に位置する存在論的な関与を、(かつて Gödel が示唆した) ひとつの厳密な理論としての哲学 (Wang (1974), p. 85) として数学的に扱うことを可能にする理論であり、量子力学的物理量 (観測可能量) の値の解釈に関わる量子集合論の研究が含意の選択に決定的に依存することを踏まえると、量子論理における含意の問題は、現代の科学基礎論において存在論を展開する上での原理的な問いであるといえる。

参考文献

Birkhoff, G., & von Neumann, J., (1936), "The Logic of Quantum Mechanics," *Annals of Mathematics*, **37**, 823-843.

Kotas, J., (1967), "An Axiom System for the Modular Logic," *Studia Logica*, **21**, 17-38.

Wang, H., (1974), *From Mathematics to Philosophy*, London: Routledge & Kegan Paul.

大出晃 (1979) 「論理的世界像の変革：量子論理をめぐって」 科学基礎論研究 **14** 巻 91-98 頁.

Hardegree, G. M., (1981), "Material Implication in Orthomodular (and Boolean) Lattices," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **22**, 163-182.

Takeuti, G., (1981), "Quantum Set Theory," in *Current Issues in Quantum Logic*, E. G. Beltrametti & B. C. van Fraassen, eds., New York: Plenum Press, pp. 303-322.

Kalmbach, G., (1983), *Orthomodular Lattices*, London: Academic Press.

Beran, L., (1985), *Orthomodular Lattices : Algebraic Approach*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Ozawa, M., (2007), "Transfer Principle in Quantum Set Theory," *Journal of Symbolic Logic*, **72**, 625-648.

Ozawa, M., (2009), "Orthomodular-valued Models for Quantum Set Theory," arXiv: 0908.0367v1 [quant-ph].