

# 超準解析的アプローチとその周辺

伊藤 美香 (Mika Ito)

名古屋大学大学院情報科学研究科

「数学とは何か」という哲学的問題意識が数学にもたらした影響は大きい。これまで数学基礎論においては論理学的研究の成果が重要視された数学像がつけられてきた。情報科学、とりわけ計算機科学の基礎としても応用がなされており、数学と哲学との融合が見事になされた分野とみてもよいであろう。

超準解析はこの論理学的手法を伴った数学基礎論的研究手法の1つである。Model Theory の1分野と見ることができる。1960年代、ロビンソン(A. Robinson)により実数を拡張したのとして、その無限小・無限大を伴う計算アプローチとして誕生した。具体的には数理論理学を用いて、all real functions がどのように拡張されるかその振る舞いを研究したものである。ここで詳細は省くが(これを論じることは $\epsilon$ - $\delta$ 論法とも関係あり)無限小自体は、それ以前より数学・哲学分野において論じられてきてはいたが、無限小を直接考察するライプニッツの方法は(19c 後半、実数の連続性における無限小を直接用いない $\epsilon$ - $\delta$ 論法にとってかわられて以来)ほぼ顧みられなくなっていた。いずれにせよ、無限小の概念自体 small enough といった言葉による直観的近似に頼っていたことを顧みれば、300年後のこの発見は大きな意味を有していたことがわかる。

無限大を実無限 real infinity 的にとらえようとする方法は、他分野に広がっており、例えばボルツァーノの思想、集合論、統計力学等においても見出すことができる。

無限小概念を取り入れた超準解析は、後にキースラー(H.J. Keisler)によって発展をみて、1969年には実際のものとなり、我が国においても1976年に齋藤正彦によって紹介された。また竹内外史においては「\*の世界」といった表現を用いて紹介している。デービス(M. Davis)のものは1982年、難波完爾により紹介された。

数学研究が有する「新たな世界の創造」は、哲学的な考察が融合することで新しい知見を我々に生み出す1コマとなっているのかもしれない。

数学はその対象を選ばない。数学そのものの研究。これが新しい世界観を無数に生みだしているとすれば、それ自体好ましいことである。

一方において科学哲学全体を覆う「仮説の形成と確証」といった問題にもふれなくてはならないであろう。これに関連してライヘンバッハの帰納法の仮説的性格を説いた「帰納の正当化」という問題がある。

詳細は省くが、内容を支える前提については結局、科学の実践に即した間接的な擁護しか可能ではないとすれば、帰納が依存する一見ア・プリオリな前提(例えば実数論も含めて。ただし数そのものの考察についてはなお慎重な議論が必要ではある)も、

科学の歴史的展開の中では意識的・無意識的に形成されてきた高次の仮説・提案と見なすことができる。実際、その実り豊かさは言うまでもない。

「新たな世界の創造」はその対象を選ぶことをしない。むしろより多くを我々に与えてくれるのではないだろうか。ただし、ここから生み出される「新しい知見」がこの世界において具体的に、またどこからどのようにやってくるのかは誰にもわからない。これを実際かつ具体的に研究してゆくことは、数学むしろそれ以外の科学全てに課せられた課題であるのかもしれない。

これは筆者自身が現在抱く一つの見方である。しかし哲学的問題意識を伴う地道な定式化のプロセスを経て誕生した新たな視座がもたらすものは、とても大きいのではないだろうか。本当の知識とは、実はこうした1つ1つ具体的に手をかけた地道な積み重ねによるものといえるのであろう。哲学と数学の融合がもたらすものは、今後ますます現実味を帯びてゆくにちがいない。

#### 参考文献

- [1]H.Reichenbach, *The Rise of Scientific Philosophy*, 1951. 『科学哲学の形成』みすず書房, 1954.
- [2]A.Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966. Revised edition by Princeton University Press, Princeton, 1996.
- [3]H.J Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston Mass., U.S.A. 1976. 『無限小解析の基礎』東京図書, 1979.
- [4]H.J Keisler, *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, 2nd edition, PWS Publishers, 1986.
- [5]M.Davis, *Applied Nonstandard Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1977. 『超準解析』倍風館, 1982. Dover edition, first published in 2005.
- [6]神野慧一郎/内井惣七, 『論理学—モデル理論と歴史的背景』ミネルヴァ書房, 1976.
- [7]飯田隆 編, 『リーディングス 数学の哲学 ゲーデル以後』勁草書房, 1995.
- [8]内井惣七, 『科学哲学入門 科学の方法・科学の目的』世界思想社, 1995.
- [9]M. Manzano, *Model Theory*, Oxford University Press, 2006.
- [10]I.V.D Berg/ V. Neves (eds.), *The Strength of Nonstandard Analysis*, Springer Wien New York, 2010.