

HoTT と圏論の哲学的用途

才川 隆文 (Takafumi Saikawa)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 博士後期課程

田中 健策 (Kensaku Tanaka)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 博士後期課程

二十世紀中盤ごろから、位相幾何学の様々な手法に統一的視座を提供するものとして圏論が発達した。それは代数幾何、理論物理学、計算機科学等様々な分野へと豊かで強力な道具を提供し続けている。

圏論は「対象」ではなく、対象と対象の関係「射」に注目することにより、変化してゆく物事、未だ最終結果のわからないあやふやな物事等を記述するのに優れている。さらに形式的に取り扱いにくい「柔らかい概念」をある文脈の中で、「同値類をとる」「普遍的対象をとる」「極限をとる」「閉包をとる」等の操作で、形式的取り扱いがしやすい「硬い概念」に作り替える操作を持っている。

例えば、かつて数学的な空間は点の集合に構造を入れたものであると考えられてきた。しかし最近では、空間が先にあり「だんだんと空間の範囲を狭めていける」という意味で順序「より狭い」を射とする圏の構造を有して、点とはその極限として作られる「点なし空間 (pointless topology)」という考え方に注目が集まっている。(逆ればウィリアム・オッカム等スコラ哲学者も有していた発想ではあるが)「非可換空間」「量子空間」とよばれる空間においては、そもそも「点がない」という事態すら起こりえる。

Steven Vickers らは、これを「観測」と関係づけている。空間の範囲をだんだん狭めてゆくのは、観測を続けて情報が得られてゆく過程とみなせるのである。すると「点」とは、観測のずっと先にあると我々が仮構する様々な概念 (例えば「実在」) に対応することになるのかもしれない。「観測」という行為は実際に「観測」できるが「実在」自身は観測できない。同様に「空間」はとりあえず目の前にあるが「点」はそうはなかなかいかない概念である。

圏論が優れているのは上記のように、観測しやすいが形式的に扱いにくい概念から、観測しにくいが形式的に扱いやすい概念へと橋渡しすることができる場所にある。逆も言える。ある系列が極限を持つか持たないか、二つの対象が同値かどうかは「文脈」、つまりどの圏の中で考えるかにおいて変わるのである。例えば数学において「 $=$ 」とはどういう意味なのかという問題がある。「 $1 + 3 = 4$ 」 $1 + 3$ と 4 が同じという意味なのだろうか。すると $1 + 3$ と $2 + 2$ も同じなのだろうか。ここには数学において「同値なもの」を文脈によって「同じもの」とみなしたり、みなさなかつたりするという文化があ

る。

代数学においては、整数と同型な構造 A に度々出会うが、「 $A = \mathbb{Z}$ 」と書いてしまうと注意されることがある。同型なだけで同じではないはずだから「 $A \cong \mathbb{Z}$ 」と書くべきだと。それとは別に、数学者でも同型ならば「 $=$ 」で結んでしまう人もいたりする。

それは、ある文脈で同型なものは、その文脈の中では同じものとみなして良いからだ。同一視することは形式的取り扱いにとってとても便利なのである。しかし文脈は無数にあって、数学をするためにはそれら文脈を渡り歩かなくては行けない。

圏論で考えることは、文脈に視点を引き戻し、同一視により潰れてしまった情報を復元するためにも非常に役立つものだ。

ここ数年における新しい理論「ホモトピー型理論 (HoTT)」は、計算機科学の型理論における「 $=$ 」を、位相幾何学のホモトピー同値「連続変形がある」の性質で解釈しようとする試みである。例えば上記の例「 $1 + 3 = 4$ 」等を計算機科学的解釈に使えるといったものであり、またある人の語る「自然数」と別の人が語る「自然数」がとにもかくにも同じ「自然数」と理解できるという「数学コミュニケーション理論」への可能性のヒントにもなっているといえる。畢竟、ここにも「対象でなく（同一視したら潰れてしまうであろう）射に注目を移す」といった圏論的な発想が根源にはある。

ここにおいて行われていることは「観測はしにくいが形式的に扱いやすい概念」から計算機の中、もしくは脳の中で起こっている「観測しやすいが形式的に扱いにくい概念」へと橋渡しをすることなのだ。

圏論は雑多な情報を適切につぶして、時には必要になった情報を復元することによって、抽象度の高い概念と低い概念とを結ぶ。これは自然主義等の哲学的営為にも生かされるといえる。

本発表における前半、数学における圏論的手法の一例として、才川がホモトピー型理論の導入を主題とし、後半その哲学における応用への提言を田中が行う予定である。