相対論と量子論の統合への道

清水哲男（Tetsuo Shimizu）

相対論と量子論は，ミクロコスモスからマクロコスモスに至る全自然の全階層において成立する普遍法則であり，量子電磁気学いわゆる相対論的量子場の理論の成立によって統合されたかに見えたが，そこには本質な困難，いわゆる「発散の困難」が潜んでいる．朝永-Schwinger-Feynman らの「くりこみ理論」によって多くの物理量が計算可能となりこの困難は一応克服されたかに見えるが，しかし無限大の「裸の」質量や「裸の」無限大の電荷が自然界に「実在する」はずもないことから本質的な解決にはなっていない，という意見は，その創設者の一人である P.A.M. Dirac(1902-1984)からも表明されてきた．他方筆者によって「自乗するとそれぞれミンコフスキー計量(Minkowski metric)およびダランベール演算子(d'Alembertian)になるような(1,0)次微分ベクトル場および(0,1)次微分形式の存在」が見出された．それを明に書けば，

$$d_4 \equiv \tilde{1}_t dt + \tilde{1}_s d\vec{s} \Rightarrow d_4^2 = \left(\tilde{1}_t dt + \tilde{1}_s d\vec{s}\right)^2 = dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right),$$

$$\partial_4 \equiv \tilde{1}_t \partial_t + \tilde{1}_s \partial_{\vec{s}} \Rightarrow \partial_4^2 = \left(\tilde{1}_t \partial_t + \tilde{1}_s \partial_{\vec{s}}\right)^2 = \partial_t^2 - \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right),$$

$$d\vec{s} \equiv i \cdot dx + j \cdot dy + k \cdot dz \Rightarrow d\vec{s}^{\,2} = -\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) = dr^2,$$

$$\partial_{\vec{s}} \equiv i\partial_x + j\partial_y + k\partial_x \Rightarrow \partial_{\vec{s}}^2 = -\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) = -\Delta,$$

である．$\left\{1, \tilde{1}_s, \tilde{1}_t, \tilde{1}_{st}; \imath, i, j, k\right\}$ または，$\left\{1, \imath i', \imath j', \imath k'; \imath, i, j, k\right\}$ と表記される(ここで $\imath, \imath^2 = -1$ は，全ての要素と可換な，いわば「普遍虚数単位」とでもいえるものであり，i, j, k と混同しないように) 「奇妙な数学的形式」であるこの 8 元代数システム，の出所をよくよく探究してみれば，Hamilton の 4 元数(quarternion) の発展形であるところの多重 4 元数(multiple quarternion)および複素(complex quarternion)に帰着し，それらを統合した「多重・重複」4 元数に相当するものであり，それはまたクリフォード代数(Clifford algebra)システムの一種でもあった．この 8 元代数システムの反対称(anti-symmetric)交換子積および対称(symmetric)交換子積は，以下の通り定義できる．

$$[i, j] = ij - ji = 2k, [j, k] = 2i, [k, i] = 2j; \{i, j\} = ij + ji = 0 = \{j, k\} = \{k, i\},$$

$$\left[\tilde{1}_s, \tilde{1}_t\right] = 2\imath\tilde{1}_{st}, \left[\tilde{1}_t, \tilde{1}_{st}\right] = 2\imath\tilde{1}_s, \left[\tilde{1}_{st}, \tilde{1}_s\right] = 2\imath\tilde{1}_t \left\{\tilde{1}_s, \tilde{1}_t\right\} = 0 = \left\{\tilde{1}_t, \tilde{1}_{st}\right\} = \left\{\tilde{1}_{st}, \tilde{1}_s\right\},$$

さらに，(1,0)次微分ベクトル場$\left\{\partial_t; \partial_x, \partial_y, \partial_z\right\}$および(0,1)次微分形式$\left\{dt; dx, dy, dz\right\}$は，

$$\left[\partial_{x_l}, dx_m\right] = \delta_{lm}, \left[\partial_{x_l}, \partial_{x_m}\right] = 0, \left[dx_l, dx_m\right] = 0\left(x_l = (t, x, y, z)\right)$$

という反対称交換子積(量子力学的正準交換関係)によって，(無限次元)テンソル代数システム(Lie 代数)を構成し，その 8 元代数システムとの接合積(joint product)を，

$$X_t \equiv \tilde{1}_t \partial_t, X_x \equiv \tilde{1}_s i\partial_x, X_y \equiv \tilde{1}_s j\partial_y, X_z \equiv \tilde{1}_s k\partial_z;$$
$$\omega_t \equiv \tilde{1}_t dt, \omega_x = \tilde{1}_s i \cdot dx, \omega_y = \tilde{1}_s j \cdot dy, \omega_z \equiv \tilde{1}_s k \cdot dz,$$

によって定義すると，これら諸要素は，反対称子積および対称子積によって(無限次元)8 元テンソル代数システム(8-fold tensor algebra)を形成することができ，それらから構成される諸要素と，それらが満たす交換関係の一部をあげれば，たとえば，

$$\left[X_t, \omega_t\right] = 1, \left[X_x, \omega_x\right] = -1 = \left[X_y, \omega_y\right] = \left[X_z, \omega_z\right], \left[X_t, \omega_x\right] \equiv 2Z_{tx} = 2X_t\omega_x, \cdots,$$
$$\left\{X_t, \omega_t\right\} \equiv 2S = \omega_t X_t + X_t \omega_{tt}, \left\{X_t, \omega_x\right\} = 0 = \left\{X_t, \omega_y\right\} = \left\{X_t, \omega_z\right\}, \cdots,$$
$$\left[X_t, X_x\right] \equiv 2X_{tx} = 2X_t X_x, \left[X_t, X_y\right] \equiv 2X_{ty} = 2X_t X_y, \left[X_t, X_z\right] \equiv 2X_{tz} = 2X_t X_z, \cdots,$$
$$\left\{X_t, X_x\right\} = 0 = \left\{X_t, X_y\right\} = \left\{X_t, X_z\right\}, \cdots; \Rightarrow \left[Z_{xy}, Z_{yx}\right] + \left[Z_{yz}, Z_{zy}\right] + \left[Z_{zx}, Z_{xz}\right] = 0,$$

等々，そこに真空運動解が存在し，ローレンツ変換に対して反変的(contravariant)あるいは共変的(covariant)な $d_4 = \omega_t + \omega_x + \omega_y + \omega_z$ あるいは $\partial_4 = X_t + X_x + X_y + X_z$ が，構成可能であることが判明した．さらにこれらの演算子の，反対称子交換積および対称交換子積を計算してみると，

$$\left[\partial_4, d_4\right] = \left[X_t + X_x + X_y + X_z, \omega_t + \omega_x + \omega_y + \omega_z\right] = 2\left(-1 + \imath\tilde{1}_{st}\vec{N} + 2\vec{M}\right),$$
$$\vec{N} = iN_x + jN_y + kN_x, \vec{M} = iM_x + jM_y + kM_z,$$
$$2\tilde{n}_4 = \left\{\partial_4, d_4\right\} = \left\{X_t + X_x + X_y + X_z, \omega_t + \omega_x + \omega_y + \omega_z\right\} = 2\left(S_t + S_x + S_y + S_y\right),$$
$$2S_t = \omega_t X_t + X_t \omega_t, 2S_x = \omega_x X_x + X_x \omega_x, 2S_y = \omega_y X_y + X_y \omega_{y,} 2S_z = \omega_z X_z + X_z \omega_z,$$

を得る．要素 $\left\{N_x, N_y, N_z; M_x, M_y, M_z\right\}$ は，ローレンツ変換群(Lorentz transformation group)のリー 代数(環, Lie algebra)であり，以下のような交換関係を満たしている．

$$\left[N_x, N_y\right] = M_z, \left[N_y, N_z\right] = M_x, \left[N_z, N_x\right] = M_y;$$
$$\left[M_x, M_y\right] = M_z, \left[M_y, M_z\right] = M_x, \left[M_z, M_x\right] = M_y;$$
$$\left[M_x, N_y\right] = N_z, \left[M_y, N_z\right] = N_x, \left[M_z, N_x\right] = N_y;$$

すなわち，8 元テンソル代数システムの諸要素は，相対論的な諸運動や諸相互作用を「行う」ところの運動体が自然において「存在する」その様子を忠実に「再現する」ことができる．また，8 元テンソル代数システムは，その構成法からして，数学的な「(特異)点」を導入することに起因する「発散の困難」からは全く無縁であり，しかも，量子力学的正準交換関係を自動的に満たしており，量子論と全く無矛盾である．したがって，わが 8 元テンソル代数システムは，相対論と量子論との，自然学的に無矛盾な統合への道を切り拓くべき有力なオルガノンとしての資格を有する，と思われ，その諸構成要素の満たすべき諸関係について，詳細な解析を実施しているところである．講演においては，解析の諸結果を報告し，その自然学的解釈を併せて発表する．