ゲーデル・ダメット論理の情報フロー

平井 洋一
東京大学大学院情報理工学系研究科博士課程、日本学術振興会特別研究員 (DC2)

数理論理学の関心の一つは、余分を含む証明から余分を取り除くことである。例を挙げる。ここで $\wedge$ は連言である。「この証拠により A である。あの証拠により B である。従って $A \wedge B$ である。なので A である」という A の証明で、B が登場するところは余分なので、最初だけ取り出して「この証拠により A である」で仕舞いにしてしまえば、余分を取り除いたことになる。結論として A が出てくることに変わりはないし、しかも、変形前後の証明で A である証拠は同じであると思い込むことができる: そう思い込む方法を下に示す。

ブラウアー=ハイティング=コルモゴロフ解釈 (BHK 解釈) という、論理結合子の説明がある。連言 $\wedge$ の説明だけ抜き書きすると、$A \wedge B$ の証拠とは A の証拠と B の証拠の組である、とある。これをもってみると「この証拠 p により A である。あの証拠 q により B である。従って証拠の組 $\langle p, q \rangle$ によって $A \wedge B$ である。なので証拠の組から左の証拠を取り出して p により A である」というように、証拠がついた二つの論理式の間に $\wedge$ を入れたり外したりする過程で、A の証拠は変わらず p のままのはずだと思い込める。

さらに証拠をプログラムだと、論理式を型だと思い込むと、計算機を動かすための抽象としてそれなりに便利なので、BHK 解釈を真に受けたプログラミング言語がある。たとえば型 $A \to B$ のプログラムは、型 A のプログラムをとり型 B のプログラムとなる。これは、BHK 解釈で、含意 $A \to B$ の証拠は A の証拠を受けとって B の証拠にできるものとされていることを、真に受けている。証明から余分を取り除く手順が、そのまま、計算機上でプログラムを実行する手順となっている。

証明に余分が一箇所とは限らないので、どの余分から取り除いていくかによって、違う証明が得られ、それぞれからどんなふうに余分を取り除いても二度と同じ証明にはならないかもしれない。直観主義命題論理の自然演繹という証明体系ではそうならないが、古典命題論理の自然演繹ではそうなることがある。証明の余分を無視して証明の意味を定式化したいときは、この証明簡約の非決定性は、問題である。

本提題では、証明簡約の非決定性が有意義である状況を示す。ゲーデル・ダメット論理の証明簡約の非決定性が、実は、計算機科学で waitfree と呼ぶ情報フローの制約を特徴づけることを示す。ゲーデル・ダメット論理とは、直観主義論理に加えて $(\phi \to \psi) \vee (\psi \to \phi)$ という形の論理式すべてを公理として認めた論理である。

Waitfree とは、複数のプログラムが並走するときに、どのプログラムも別のプログラムを待たないという制約である。この制約のもとでは、たとえば、二者が情報を交換することはできない。なぜならば、片方が動きはじめたときには既にもう片方が動作を終了してしまっているかもしれないから、あとから動きはじめた者は、先に終了してしまった者に、情報を渡すことができないからだ。しかしながら、すくなくとも片方が情報がもう片方に伝わるように工夫することはできる。双方が伝えたい情報を書き残しておけば、片方が動きはじめたときには既にもう片方が動作を終了していたとしても、終了した者が書き残した情報を、あとから動きはじめた者が読むことができるからだ。情報が A から B にうつるか、B から A にうつるか、少なくとも一方は起きる。これは $(A \to B) \vee (B \to A)$ というゲーデル・ダメット論理の公理に形が似ている。この状況を数学的に調べ、なにがわかったか考える。